

**FACULDADE DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS DE EXTREMA  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**MATEUS PEDRO DA SILVA**

**UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE TENSÕES EM REGIÕES  
DE VIGAS SUBMETIDAS À GRANDES VARIAÇÕES DE  
ESFORÇOS CORTANTES**

**EXTREMA**

**2018**

MATEUS PEDRO DA SILVA

**UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE TENSÕES EM REGIÕES  
DE VIGAS SUBMETIDAS À GRANDES VARIAÇÕES DE  
ESFORÇOS CORTANTES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Civil da FAEX (Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas de Extrema), como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil, sob orientação da Prof.<sup>a</sup> M.<sup>a</sup> Roberta Moraes Martins e coorientação do Prof. Leonardo Corrêa Mariano.

**EXTREMA**

**2018**



**ATA DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**  
**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**FAEX – FACULDADE DE EXTREMA**

Em sessão às 17h30 do dia 27 de novembro de 2018 o aluno Mateus Pedro da Silva apresentou o Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado **“Uma análise comparativa de tensões em regiões de vigas submetidas à grandes variações de esforços cortantes”** como requisito para conclusão do Curso de Engenharia Civil, perante uma Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:



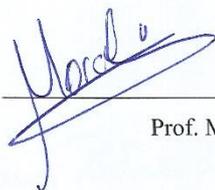
Mateus Pedro da Silva (Aluno)



Prof.ª Ma. Roberta Moraes Martins (orientadora)



Mariana Junqueira Paduan



Prof. Marcelo Henrique Hermógenes

Aprovado

Aprovado com restrições ( )

Reprovado ( )

Aos meus avós. Meu avô José (*in memoriam*) e meu avô Eugênio (*in memoriam*), “engenheiros” de sabedoria popular.

À minha família e meus amigos, em especial à minha esposa e aos meus pais.

Agradeço, primeiramente, à Deus.

Agradeço à Carmen, minha esposa, pelo encorajamento e paciência.

Aos meus pais, Mauricéia e Amauri, grato pelo amor, incentivo e apoio durante toda a minha vida.

Ao amigo e professor, Dr. Wlamir Carlos de Oliveira, pelos preciosos ensinamentos sobre o Método dos Elementos Finitos, pelo auxílio e motivação.

Aos orientadores, Prof.<sup>a</sup> Roberta Martins e Prof. Leonardo Mariano, e aos demais docentes do curso.

“O conhecimento torna a alma jovem e diminui a amargura da velhice. Colhe, pois, a sabedoria. Armazena suavidade para o amanhã.”

Leonardo da Vinci

## RESUMO

O propósito deste trabalho é apresentar uma análise comparativa de tensões em vigas, principalmente em regiões onde atuam cargas concentradas que ocasionam variação abrupta dos esforços cortantes. A obtenção de resultados para essa análise se dá pela teoria elementar de vigas que é objeto de estudo da disciplina de Resistência dos Materiais, pelas técnicas de Fotoelasticidade da Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos. Neste último método, é utilizada a formulação isoparamétrica com a implementação do elemento quadrático quadrilateral plano da família *Serendipity*. Com relação aos resultados colhidos através da aplicação das equações da Resistência dos Materiais, há de se considerar as restrições existentes à determinação de tensões e deformações em regiões próximas ao ponto de aplicação do carregamento localizado sendo que, nesses casos, deve-se observar as restrições devidas ao Princípio de Saint-Venant, que simplifica o modelo, considerando uma distribuição uniforme de tensões. Para melhor visualização, comparação e criticidade dos resultados, faz-se o uso de gráficos e tabelas.

**Palavras-Chaves:** Tensões; Elasticidade; Elementos Finitos.

## **ABSTRACT**

*The purpose of this work is to present a comparative analysis of stress in beams, especially in regions where concentrated loads occur that cause abrupt variation of shear forces. The results obtained for this analysis are given by the elementary theory of beams that is object of study of the discipline of Resistance of Materials, by the techniques of Photoelasticity of Elasticity Theory and by the Finite Element Method. In this latter method, the isoparametric formulation is used with the implementation of the Quadratic Quadrilateral Plane Element of the Serendipity Family. With respect to the results obtained through the application of the equations of the Resistance of the Materials, it is necessary to consider the existing restrictions to the determination of stress and deformations in regions near the point of application of the localized load, being that in these cases, the restrictions due must be observed to the Saint-Venant Principle, which simplifies the model, considering a uniform distribution of stresses. For better visualization, comparison and criticality of the results, graphs and tables are used.*

**Keywords:** *Stress; Elasticity; Finite Elements.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Corpo sob atuação de forças. ....	18
Figura 2.2 – Decomposição de uma força em suas componentes cartesianas. ....	19
Figura 2.3 – Componentes de tensões atuantes em uma área do corpo. ....	20
Figura 2.4 – Esquema estático de uma viga biapoiada nos seus extremos. ....	22
Figura 2.5 – Reações de apoio da viga. ....	22
Figura 2.6 – Diagrama de esforços cortantes atuantes na viga. ....	23
Figura 2.7 – Diagrama de momentos fletores atuantes na viga. ....	23
Figura 2.8 – Esquema estático da viga. ....	23
Figura 2.9 – Reações de apoio da viga. ....	24
Figura 2.10 – Diagramas de esforços cortantes atuantes na viga. ....	24
Figura 2.11 – Diagrama de momentos fletores atuantes na viga. ....	24
Figura 2.12 – Variação de deformações ao longo da seção transversal da viga. ....	25
Figura 2.13 – Distribuição de tensões normais na seção transversal da viga. ....	26
Figura 2.14 – Equilíbrio de momentos em torno do eixo Z na seção transversal da viga. ....	27
Figura 2.15 – Seção transversal da viga. ....	31
Figura 2.16 – Distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal da viga. ....	32
Figura 3.1 – Esquema estático da viga. ....	35
Figura 3.2 – Superposição de tensões na chapa semi-infinita e na viga retangular. ....	36
Figura 3.3 – Diagrama de momentos fletores dividido em retângulos elementares. ....	39
Figura 3.4a – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $-c$ . ....	40
Figura 3.4b – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $-0,5c$ . ....	40
Figura 3.4c – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $0c$ . ....	40
Figura 3.4d – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $+0,5c$ . ....	41
Figura 3.4e – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $+c$ . ....	41
Figura 3.5a – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $-0,5c$ . ....	41
Figura 3.5b – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $0c$ . ....	42
Figura 3.5c – Valores de $\beta$ para tensões normais na superfície $+0,5c$ . ....	42

Figura 4.1 – Elemento unidimensional com dois pontos nodais e valores pontuais das funções de interpolação.....	47
Figura 4.2 – Elemento unidimensional com três pontos nodais e valores pontuais das funções de interpolação. ....	48
Figura 4.3 – Sistema de coordenadas locais para o domínio de um elemento de barra.....	48
Figura 4.4 – Esquema estático da viga. ....	50
Figura 4.5 – Divisão da viga em quatro subdomínios.....	53
Figura 4.6 – Subdomínio de três pontos nodais.....	57
Figura 4.7 – Domínio discretizado em dois subdomínios. ....	59
Figura 4.8 – Esquema estático da viga (a) e diagrama de momento fletor (b).....	61
Figura 4.9 – Elemento infinitesimal e seu campo de deslocamentos.....	64
Figura 4.10 – Chapas submetidas a carregamentos no plano $xy$ .....	66
Figura 4.11 – Estruturas submetidas ao estado plano de deformações.....	68
Figura 4.12 – Elemento de Taig. ....	70
Figura 4.13 – Área $dA$ no sistema local (a) e no sistema global (b) de coordenadas. ....	75
Figura 4.14 – Elemento plano quadrilateral com oito pontos nodais. ....	78
Figura 4.15 – Posição dos quatro pontos de integração para solução exata de integrais de polinômios de 3ª ordem em cada direção.....	84
Figura 4.16 – Posição dos nove pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios de quinta ordem em cada direção. ....	85
Figura 4.17 – Esquema estático e seção transversal da viga. ....	86
Figura 6.1 – Esquema estático e seção transversal da viga. ....	92
Figura 6.2 – Superfícies da viga cujas tensões serão calculadas. ....	93
Figura 6.3 – Discretização da viga em elementos finitos. ....	93

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 4.1 – Erros percentuais para a deflexão na viga.....	88
Gráfico 4.2 – Erros percentuais para as tensões normais atuantes na viga. ....	88
Gráfico 6.1 – Diagrama de esforços cortantes atuantes na viga.....	94
Gráfico 6.2 – Tensões de cisalhamento calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície +0,5c (y = +10 cm).....	95
Gráfico 6.3 – Tensões de cisalhamento calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície +0,5c (y = +10 cm).....	95
Gráfico 6.4 – Tensões de cisalhamento calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +0,5c (y = +10 cm). ....	96
Gráfico 6.5 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície +0,5c (y = +10 cm). ....	97
Gráfico 6.6 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +0,5c (y = +10 cm).....	97
Gráfico 6.7 – Tensões de cisalhamento calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície 0c (y = 0 cm).....	98
Gráfico 6.8 – Tensões de cisalhamento calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície 0c (y = 0 cm).....	99
Gráfico 6.9 – Tensões de cisalhamento calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície 0c (y = 0 cm).....	100
Gráfico 6.10 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície 0c (y = 0cm). ....	101
Gráfico 6.11 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície 0 c (y = 0 cm). ....	101
Gráfico 6.12 – Tensões de cisalhamento calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície -0,5c (y = -10 cm). ....	102

Gráfico 6.13 – Tensões de cisalhamento calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície $-0,5c$ ( $y = -10$ cm). .....	103
Gráfico 6.14 – Tensões de cisalhamento calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície $-0,5c$ ( $y = -10$ cm). .....	104
Gráfico 6.15 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície $-0,5c$ ( $y = -10$ cm). .....	105
Gráfico 6.16 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície $-0,5c$ ( $y = -10$ cm).....	105
Gráfico 6.17 – Diagrama de momentos fletores atuantes na viga.....	106
Gráfico 6.18 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície $+c$ ( $y = +20$ cm). .....	107
Gráfico 6.19 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície $+c$ ( $y = +20$ cm).....	108
Gráfico 6.20 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície $+c$ .....	109
Gráfico 6.21 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície $+c$ ( $y = +20$ cm). .....	110
Gráfico 6.22 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície $+c$ ( $y = +20$ cm). .....	110
Gráfico 6.23 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície $+0,5c$ ( $y = +10$ cm). .....	111
Gráfico 6.24 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície $+0,5c$ ( $y = +10$ cm).....	112
Gráfico 6.25 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície $+0,5c$ .....	113
Gráfico 6.26 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície $+0,5c$ ( $y = +10$ cm). .....	114

Gráfico 6.27 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +0,5c (y = +10 cm). .....	114
Gráfico 6.28 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície 0c (y = 0 cm).....	115
Gráfico 6.29 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície 0c (y = 0 cm).....	116
Gráfico 6.30 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície 0c.....	117
Gráfico 6.31 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos 0c (y = 0cm). ....	118
Gráfico 6.32 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície -0,5c (y = -10 cm). .....	119
Gráfico 6.33 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície .....	120
Gráfico 6.34 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -0,5c.....	121
Gráfico 6.35 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície -0,5c (y = -10cm). .....	122
Gráfico 6.36 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -0,5c (y = -10 cm). .....	122
Gráfico 6.37 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície -c (y = -20 cm). .....	123
Gráfico 6.38 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície .....	124
Gráfico 6.39 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -c.....	125
Gráfico 6.40 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície -c (y = -20cm). .....	126

Gráfico 6.41 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -c ( $y = -20$  cm). ..... 126

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Grau do polinômio a ser integrado em função do número de pontos de integração.....	82
Tabela 4.2 – Resultados encontrados para cada discretização. ....	87

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	letra do alfabeto grego <i>alfa</i> minúscula; Ângulo;
$\beta$	letra do alfabeto grego <i>beta</i> (minúscula); Parâmetro para acréscimo de tensão $\sigma'$ e $\tau'$ ;
$\gamma$	letra do alfabeto grego <i>gama</i> minúscula; Distorção; Deformação de cisalhamento;
$\Gamma$	letra do alfabeto grego <i>gama</i> maiúscula; Variável algébrica;
$\Delta$	letra do alfabeto grego <i>delta</i> maiúscula; Variação; Infinitesimal;
$\epsilon$	letra do alfabeto grego <i>épsilon</i> minúscula; Deformação específica;
$\zeta$	letra do alfabeto grego <i>zeta</i> (minúscula); Vetor unitário;
$\eta$	letra do alfabeto grego <i>éta</i> (minúscula); Indicador de eixo vertical no sistema local de coordenadas;
$\lambda$	letra do alfabeto grego <i>lambda</i> (minúscula); Variável algébrica;
$\nu$	letra do alfabeto grego <i>ni</i> (minúscula); Coeficiente de <i>Poisson</i> ;
$\xi$	letra do alfabeto grego <i>qsi</i> (minúscula); Variável algébrica; Indicador de eixo horizontal no sistema local de coordenadas;
$\pi$	letra do alfabeto grego <i>pi</i> (minúscula); Constante matemática $\pi \cong 3,14$ ;
$\Sigma$	letra do alfabeto grego <i>sigma</i> (maiúscula); Indicador de somatório;
$\sigma$	letra do alfabeto grego <i>sigma</i> (minúscula); Tensão Normal;
$\tau$	letra do alfabeto grego <i>tau</i> (minúscula); Tensão de Cisalhamento;
$\phi$	letra do alfabeto grego <i>phi</i> ; variável algébrica;
$\Omega$	letra do alfabeto grego <i>sigma</i> (maiúscula); Variável algébrica;
$\infty$	infinito;
$\partial$	diferencial parcial;
$\int$	integral (operação matemática);

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>1.1 Considerações iniciais.....</b>	<b>16</b>
<b>1.2 Objetivos e Justificativa .....</b>	<b>17</b>
1.2.1 <i>Justificativa .....</i>	17
1.2.2 <i>Objetivo geral .....</i>	17
1.2.3 <i>Objetivos específicos.....</i>	17
<b>2 CONCEITOS E FORMULAÇÕES DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS .....</b>	<b>18</b>
<b>2.1 O conceito de Tensão .....</b>	<b>18</b>
<b>2.2 Tensões Normais provocadas pela flexão em vigas .....</b>	<b>21</b>
<b>2.3 Tensões de Cisalhamento em vigas retangulares.....</b>	<b>29</b>
<b>2.4 O Princípio de Saint-Venant .....</b>	<b>32</b>
<b>3 CONCEITOS E FORMULAÇÕES DA TEORIA DA ELASTICIDADE .....</b>	<b>34</b>
<b>3.1 Considerações Iniciais.....</b>	<b>34</b>
<b>3.2 Efeitos da atuação de carga concentrada em vigas .....</b>	<b>34</b>
<b>4 CONCEITOS E FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ...</b>	<b>44</b>
<b>4.1 Um Método de Aproximação .....</b>	<b>44</b>
<b>4.2 Método dos Resíduos Ponderados .....</b>	<b>45</b>
<b>4.3 Método de Aproximação Via Resíduos Ponderados .....</b>	<b>46</b>
<b>4.4 Conceituação do Método dos Elementos Finitos.....</b>	<b>63</b>
<b>4.5 Estado Plano de Tensões e Deformações.....</b>	<b>64</b>
4.5.1 <i>Equações Básicas da Elasticidade Linear .....</i>	64
4.5.2 <i>Estado Plano de Tensões.....</i>	65
4.5.3 <i>Estado Plano de Deformações.....</i>	68
<b>4.6 Elementos Isoparamétricos e Integração Numérica .....</b>	<b>69</b>
4.6.1 <i>Elemento Quadrilateral Isoparamétrico de Taig.....</i>	70
4.6.2 <i>Matriz de Rigidez do Elemento.....</i>	71
<b>4.7 Elemento Plano Quadrilateral Isoparamétrico Quadrático da Família <i>Serendipity</i>.....</b>	<b>77</b>
4.7.1 <i>Matriz de Rigidez do Elemento.....</i>	78

<b>4.8 Integração numérica unidimensional .....</b>	<b>80</b>
<b>4.9 Integração numérica em duas dimensões .....</b>	<b>83</b>
<b>4.10 Exemplo de aplicação dos conceitos:.....</b>	<b>86</b>
<b>5 METODOLOGIA.....</b>	<b>89</b>
<b>5.1 Requisitos para o desenvolvimento do trabalho.....</b>	<b>89</b>
<b>5.2 Procedimentos metodológicos .....</b>	<b>89</b>
<b>5.3 Ferramentas utilizadas.....</b>	<b>91</b>
<b>6 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>92</b>
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>128</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>130</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Considerações Iniciais

Conforme os critérios de normatização para o desenvolvimento de projetos de engenharia, no que se refere à concepção, análise e dimensionamento estrutural, cada vez mais exige-se precisão nos processos de cálculo para se obter resultados mais apurados dos esforços a que os elementos estruturais são submetidos.

Enfatizando ainda esse contexto, neste trabalho, são apresentados resultados de tensões nos elementos estruturais de vigas. As tensões normais e transversais que incidem em vigas são determinadas em vários pontos do elemento estrutural, tanto no sentido paralelo quanto no sentido perpendicular à linha neutra.

O desenvolvimento deste estudo tem seu foco na análise de tensões nas regiões de vigas que se localizam à pequenas distâncias dos pontos onde incidem forças concentradas, já que tais tensões, calculadas pelas equações da teoria elementar de viga, explanadas na disciplina de Resistência dos Materiais, são tensões médias obtidas por um processo de simplificação, já que de acordo com Princípio de Saint-Venant, citado em BEER (1995), a determinação das tensões nas proximidades de pontos de aplicação de forças concentradas, ou em apoios, deve ser realizada por métodos matemáticos avançados ou por métodos experimentais.

Ainda de acordo com o Princípio de Saint-Venant, desta vez citado por HIBBELER (2010), as tensões produzidas pela aplicação dessas cargas se atenua ou se dissipa, quanto mais se afasta a seção transversal do ponto de incidência da força.

As equações da Resistência dos Materiais, da Teoria da Elasticidade e o Método dos Elementos Finitos são as ferramentas empregadas para fazer tal estudo comparativo de resultados de tensões.

## 1.2 Objetivos e Justificativa

### 1.2.1 Justificativa

As justificativas primordiais para o desenvolvimento deste trabalho baseiam-se na relevância de se obter os resultados para as tensões atuantes em elementos estruturais, o que leva a se comparar os dados obtidos através de métodos de cálculo distintos e criticar as possíveis similaridades e discrepâncias existentes nos valores numéricos das tensões obtidas.

### 1.2.2 Objetivo Geral

Compreender e aplicar métodos distintos de cálculo para obtenção e comparação de resultados numéricos de tensões em vigas.

### 1.2.3 Objetivos Específicos

Nesta análise comparativa, serão calculadas as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  pela teoria elementar de vigas da Resistência dos Materiais, pela Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos.

Embora o objetivo do trabalho seja realizar uma comparação de resultados obtidos pelos três métodos citados acima, o estudo do Método dos Elementos Finitos será abordado de maneira mais concisa, buscando compreender e explanar conceitos teóricos desta poderosa ferramenta como método numérico para determinação de tensões e deformações em vários segmentos da engenharia de modo geral.

## 2 CONCEITOS E FORMULAÇÕES DA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

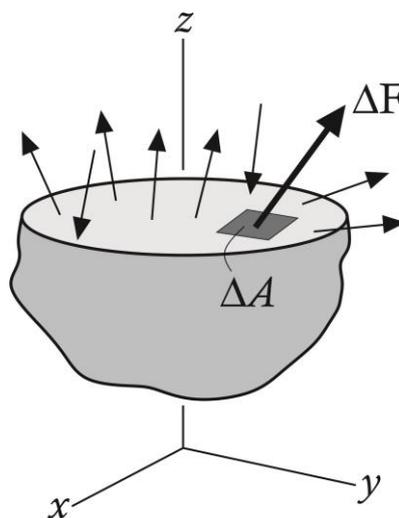
Neste capítulo realizar-se-á uma revisão bibliográfica sobre os conceitos teóricos relacionados às definições e procedimentos de cálculo de tensões normais e de cisalhamento em vigas, com base no exposto em literatura clássica da Resistência dos Materiais, tais como HIBBELER (2010) e BEER (1995).

### 2.1 O conceito de tensão

Segundo HIBBELER (2010), o conceito de tensão está relacionado aos efeitos que resultam da distribuição de forças sobre uma determinada área.

Ao admitir-se um corpo constituído de material contínuo e coeso, ou seja, a distribuição de matéria é uniforme e sem separações, com perfeita interligação entre as suas partes, pode-se tomar uma pequena região (área) de tal corpo, denominada  $\Delta A$ , para que se possa analisar a ação de uma pequena força  $\Delta F$  sobre essa área, como indicado na Fig. 2.1.

Figura 2.1 – Corpo sob atuação de forças.

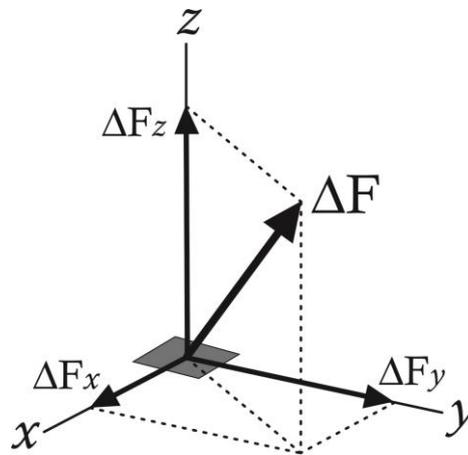


Fonte: adaptado de HIBBELER (2010), p. 15.

Primeiramente, realiza-se a decomposição de  $\Delta F$  em suas componentes cartesianas  $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$ ,  $\Delta F_z$ , mostradas na Fig. 2.2. Vê-se que a componente  $\Delta F_z$  é

perpendicular ao plano que contém a área  $\Delta A$  e que  $\Delta F_x$  e  $\Delta F_y$  são tangentes ao mesmo plano. Considerando-se, por suposição, uma diminuição da área  $\Delta A$  até um valor próximo de zero, ou seja,  $\Delta A \rightarrow 0$ , de forma proporcional ocorrerá a diminuição na intensidade de  $\Delta F$ , ou seja, razão entre a força e a área tenderá a um limite, um valor constante e finito. À esse quociente, denomina-se tensão, que ainda segundo HIBBELER (2010, p.14), “descreve a intensidade da força interna sobre um plano específico (área) que passa por um ponto”.

Figura 2.2 – Decomposição de uma força em suas componentes cartesianas.

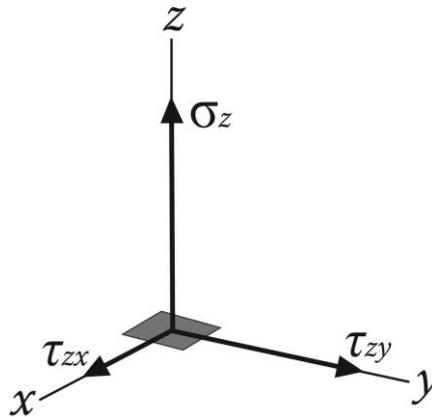


Fonte: adaptado de HIBBELER (2010), p. 15.

Seguindo com o exposto em HIBBELER (2010), denomina-se tensão normal, a razão da força, perpendicular ao plano, pela área. Tal tensão, comumente, é indicada através da letra grega  $\sigma$  (sigma). No exposto aqui, como a componente de força perpendicular ao plano é  $\Delta F_z$ , obtém-se a tensão normal  $\sigma_z$ . As tensões normais podem ainda ser classificadas como tensões de tração ou de compressão.

As tensões oriundas das forças tangentes à área  $\Delta A$  são denominadas de tensões de cisalhamento, indicadas pela letra grega  $\tau$  (tau). A completa indicação das tensões de cisalhamento contém dois índices: o primeiro indica a orientação do eixo perpendicular à área analisada e o outro indica o sentido da tensão de cisalhamento. No caso exposto nesta seção, obtém-se duas componentes de tensão de cisalhamento,  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ , indicadas na Fig. 2.3.

Figura 2.3 – Componentes de tensões atuantes em uma área do corpo.



Fonte: adaptado de HIBBELER (2010), p. 15.

Assumindo que, em barras, a deformação axial aconteça de maneira uniforme quando houver ação de cargas aplicadas no centroide da seção transversal, pode-se expressar a tensão normal como sendo:

$$\sigma_{m\acute{e}dia} = \frac{P}{A} \quad \text{Eq. 2.1}$$

onde:

$\sigma_{m\acute{e}dia}$  = tensão normal média. Considera-se, por hipótese simplificadora, que todos os pontos da seção transversal estão sujeitos à mesma tensão média.

$P$  = “força interna resultante, que é aplicada no centroide da área da seção transversal.  $P$  é determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio”. HIBBELER (2010, p. 16). As equações de equilíbrio e o método das seções, aqui citados, são abordados nos cursos de Estática ou Mecânica dos Sólidos.

$A$  = área da seção transversal.

Essas conclusões são ratificadas por BEER (1995), fornecendo a seguinte conclusão a respeito do conceito de tensão:

A força por unidade de área ou a intensidade das forças distribuídas numa certa seção transversal é chamada de tensão atuante, nessa seção, e é indicada pela letra grega  $\sigma$  (sigma). A tensão em uma barra de seção transversal  $A$ , sujeita a uma força axial  $P$ , é então obtida dividindo-se o módulo  $P$  da força pela área  $A$ . (BEER, 1995; p. 4)

Já a tensão de cisalhamento média em uma determinada seção sob a ação de forças tangentes pode ser calculada como:

$$\tau_{m\acute{e}dia} = \frac{V}{A} \quad \text{Eq. 2.2}$$

onde:

$\tau$  = tensão de cisalhamento média. Considera-se, por hipótese simplificadora, que todos os pontos da seção transversal estão sujeitos à mesma tensão.

$V$  = “força de cisalhamento interna resultante na seção determinada pelas equações de equilíbrio”. HIBBELER (2010, p. 20).

$A$  = área da seção transversal.

Entretanto, os conceitos exposto até aqui, apesar de possuírem enorme relevância, se configuram como conceitos introdutórios, visto que, pelo que se almeja no desenvolvimento desse trabalho, necessita-se de conceitos especificamente relacionados ao caso de carregamento concentrado em vigas. Desse modo, convém expor aqui definições acerca da flexão em vigas.

## 2.2 Tensões normais provocadas pela flexão em vigas

Continuando com a exposição teórica embasada em HIBBELER (2010), evidencia-se aqui que, conforme esse autor, elementos de pequena espessura comparada ao seu comprimento, sob ação de cargas que incidem na direção perpendicular ao seu eixo longitudinal, são chamadas de vigas. As vigas são elementos estruturais de extrema importância, sendo comumente produzidas com

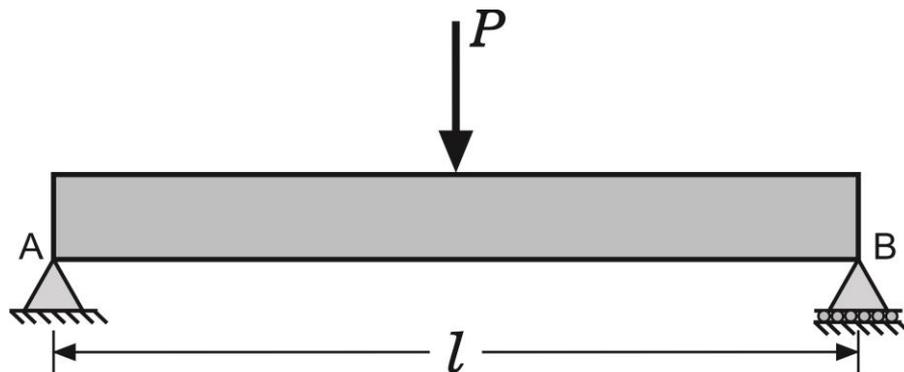
materiais utilizados em larga escala na construção civil, como concreto armado, concreto protendido, aço e madeira.

Para se determinar as tensões oriundas do efeito de flexão em vigas, deve-se, primeiramente, determinar as forças de cisalhamento e os momentos, sendo um meio eficiente para isso, a construção dos diagramas de esforço cortante e de momento fletor. Não se configura como objetivo deste trabalho a exposição da construção de tais diagramas, entretanto, segue-se dois exemplos genéricos abordando casos de vigas sob ação de forças concentradas.

1º exemplo: viga simplesmente apoiada com carga concentrada no ponto médio do seu comprimento.

O esquema estrutural genérico é representado pela Fig. 2.4:

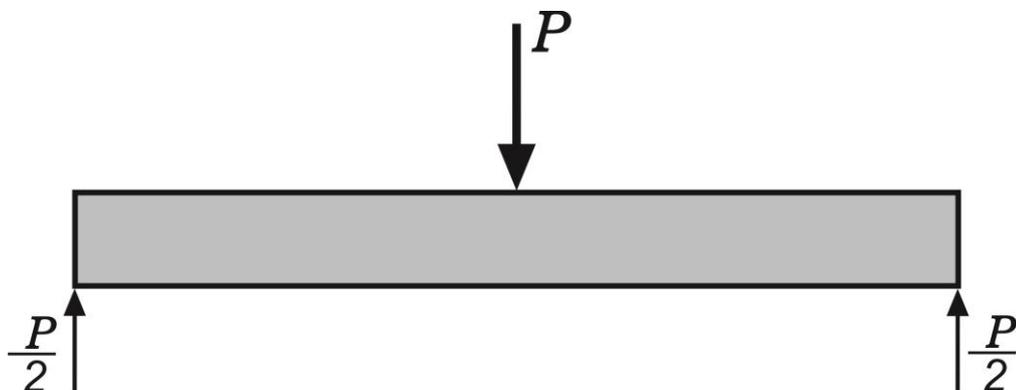
Figura 2.4 – Esquema estático de uma viga biapoiada nos seus extremos.



Fonte: elaborada pelo autor.

As reações nos apoios são mostradas na Fig. 2.5:

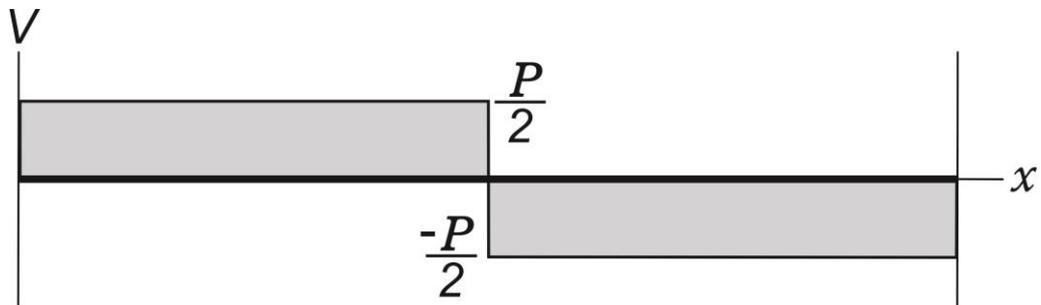
Figura 2.5 – Reações de apoio da viga.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Fig. 2.6 mostra o diagrama de esforço cortante:

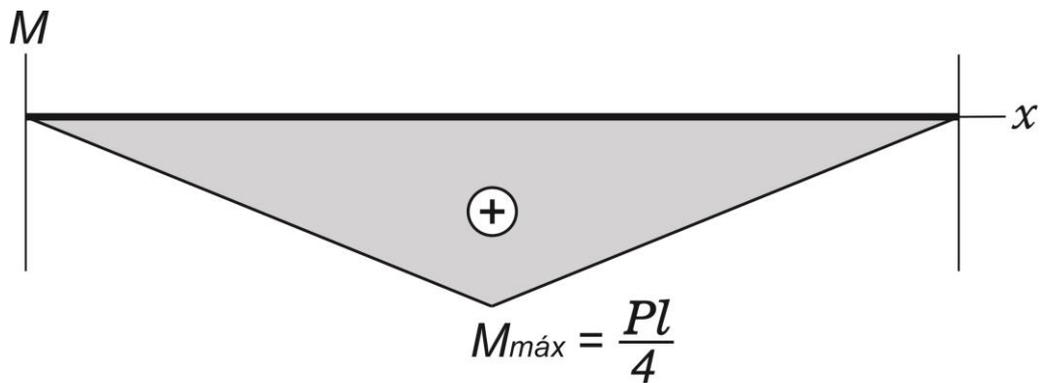
Figura 2.6 – Diagrama de esforços cortantes atuantes na viga.



Fonte: elaborada pelo autor.

Já a Fig. 2.7 mostra o diagrama de momento fletor:

Figura 2.7 – Diagrama de momentos fletores atuantes na viga.



Fonte: elaborada pelo autor.

2º exemplo: viga engastada em uma extremidade, livre na outra extremidade, com carga pontual aplicada no extremo do balanço:

O esquema estrutural genérico é representado pela Fig. 2.8:

Figura 2.8 – Esquema estático da viga.



Fonte: elaborada pelo autor.

As reações nos apoios são mostradas na Fig. 2.9:

Figura 2.9 – Reações de apoio da viga.



Fonte: elaborada pelo autor.

A Fig. 2.10 mostra o diagrama de esforço cortante:

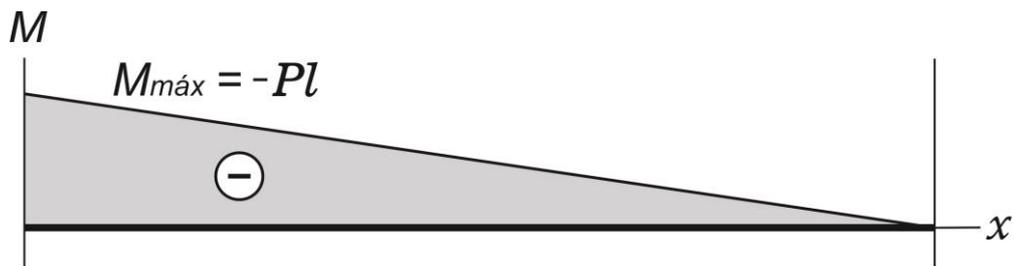
Figura 2.10 – Diagramas de esforços cortantes atuantes na viga.



Fonte: elaborada pelo autor.

Já a Fig. 2.11 mostra o diagrama de momento fletor:

Figura 2.11 – Diagrama de momentos fletores atuantes na viga.



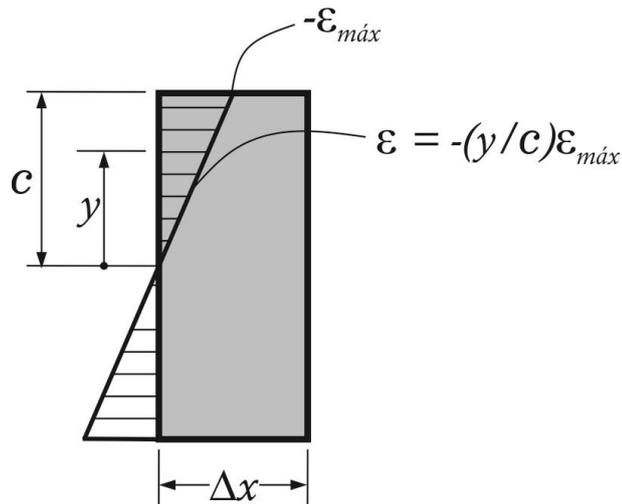
Fonte: elaborada pelo autor.

Uma vez conhecidos os esforços internos, conforme os diagramas de esforço cortante e momento fletor expostos acima, obtém-se dados para aplicar na determinação das tensões. Para desenvolver equações que permitem o cálculo de tais tensões, HIBBELER (2010) considera algumas premissas, como o fato de o material se comportar de maneira elástica e linear, obedecendo à Lei de Hooke.

Sendo assim, como o material possui variação linear de deformação, conseqüentemente, haverá variação linear de tensões normais.

A figura 2.12 mostra a variação de deformações ao longo da seção transversal:

Figura 2.12 – Variação de deformações ao longo da seção transversal da viga.



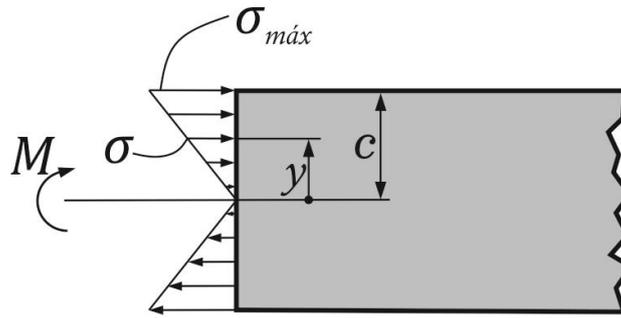
Fonte: adaptada de HIBBELER (2010), p. 203.

Como as deformações obedecem à seguinte proporção,

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{máx}} = -\frac{y}{c} \quad \text{Eq. 2.3}$$

as tensões também terão variação linear, sendo nulas na superfície neutra, atingindo valor máximo no ponto mais afastado da superfície neutra. Para momentos fletores positivos, as tensões serão de compressão na parte da seção transversal acima da linha neutra e de tração na parte abaixo da linha neutra. Para momentos fletores negativos tem-se o oposto. A Fig. 2.13 demonstra, em vista lateral, a variação de tensões normais em uma seção transversal de viga:

Figura 2.13 – Distribuição de tensões normais na seção transversal da viga.



Fonte: adaptado de HIBBELER (2010), p. 204.

Por semelhança de triângulos e admitindo válida a Lei de Hooke,  $\sigma = E\varepsilon$ , temos a seguinte relação:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{máx}} = -\frac{y}{c} \rightarrow \sigma = \left(-\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx} \quad \text{Eq. 2.4}$$

Dessa relação originam-se as equações que permitem calcular as tensões normais em pontos quaisquer na seção transversal. Lembrando que:

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow F = \sigma \cdot A$$

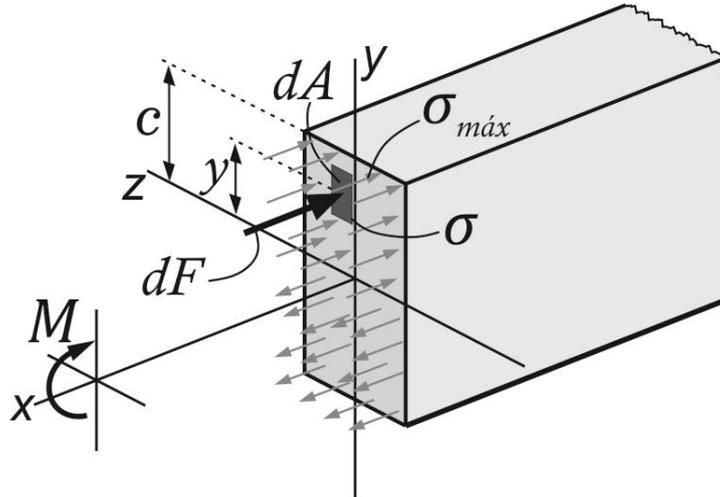
Logo:

$$dF = \sigma \cdot dA$$

Admitindo que a força resultante originada da distribuição de tensão na área da seção transversal deve ser nula e analisando a atuação de uma força  $dF$  agindo sobre um elemento de área  $dA$ , observa-se que o momento interno  $M$  deve ser igual ao momento oriundo da distribuição de tensão em torno da linha neutra.

Conforme exposto na Fig. 2.14, nota-se que a força  $dF$ , multiplicada pela distância  $y$  até a linha neutra, gera um momento  $dM$ .

Figura 2.14 – Equilíbrio de momentos em torno do eixo Z na seção transversal da viga.



Fonte: adaptada de HIBBELER (2010), p. 204.

De tal fato, obtém-se as seguintes definições, conforme HIBBELER (2010):

$$(M_R)_z = \sum M_z$$

$$M = \int_A y dF = \int_A y(\sigma dA) = \int_A y\left(\frac{y}{c} \sigma_{\text{máx}}\right) dA \Rightarrow M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y^2 dA \quad \text{Eq. 2.5}$$

Sabe-se que  $\int_A y^2 dA$  corresponde ao momento de inércia da área da seção transversal com relação ao eixo centroidal. Dessa forma, tem-se que:

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y^2 dA \Rightarrow M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \cdot I \quad \text{Eq. 2.6}$$

E, isolando  $\sigma_{\text{máx}}$  na equação 2.6, conclui-se que:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} \quad \text{Eq. 2.7}$$

Analisando a proporção:

$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} = -\frac{\sigma}{y}$$

Chega-se a fórmula:

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad \text{Eq. 2.8}$$

Onde:

$\sigma_{m\acute{a}x}$  = tensão normal máxima. Ocorre no ponto mais afastado da linha neutra;

$M$  = momento fletor interno à seção;

$I$  = momento de inércia de área em torno da linha neutra da seção transversal;

$c$  = maior distância possível de um ponto da seção com relação à linha neutra, ou seja, onde ocorre a máxima tensão normal;

As Eqs. (2.7) e (2.8) são denominadas de fórmulas da flexão. Nota-se que, evidentemente, a tensão normal em pontos coincidentes com a linha neutra é nula. Vale ressaltar ainda que em materiais cujo comportamento é regido pela Lei de Hooke, a superfície neutra da viga passa longitudinalmente pelo centroide da seção transversal.

BEER (1995) denomina as Eqs. (2.7) e (2.8) como fórmulas da flexão em regime elástico. O mesmo autor ainda traz o conceito de módulo resistente ou momento resistente, expresso pela letra  $W$ . Este conceito se refere à razão entre o momento de inércia  $I$  e o valor de  $c$  (distância máxima entre um ponto da seção e a linha neutra). Essa razão  $I/c$  depende unicamente da geometria da seção transversal.

Tomando o conceito de módulo resistente  $W$  e associando-o à Eq. (2.7), obtém-se a seguinte expressão:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M}{W} \quad \text{Eq. 2.9}$$

Sobre a Eq. (2.9), BEER (1995) afirma o seguinte:

Essa relação mostra que a tensão máxima é inversamente proporcional ao módulo resistente  $W$ , de modo que uma viga deve ser projetada com o maior valor de  $W$  possível, nas condições de cada problema. (BEER, 1995; p.328)

Dando continuidade na análise do conceito de módulo resistente e enfatizando o objetivo final deste trabalho, observa-se que, ainda de acordo com BEER (1995), para uma viga de seção retangular, pode-se simplificar o cálculo de  $W$  através da seguinte expressão:

$$W = \frac{I}{c} = \frac{bh^3/12}{0,5h} = \frac{bh^2}{6} \rightarrow W = \frac{Ah}{6} \quad \text{Eq. 2.10}$$

Como o valor máximo do momento fletor para uma viga biapoiada e com uma carga concentrada aplicada no seu ponto médio, conforme indicado na Fig. 2.7, é determinado pela expressão  $0,25PL$ , pode-se obter a seguinte fórmula:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{W} = \frac{PL/4}{Ah/6} \rightarrow \sigma_{\text{máx}} = 1,5 \cdot \frac{PL}{bh^2} \quad \text{Eq. 2.11}$$

Onde:

$P$  = carga concentrada aplicada na viga;

$L$  = comprimento longitudinal da viga;

$b$  = base da seção transversal;

$h$  = altura da seção transversal;

### 2.3 Tensões de cisalhamento em vigas retangulares

Com relação às tensões de cisalhamento em vigas, HIBBELER (2010) demonstra que estas são máximas na linha neutra da seção transversal. A distribuição de tensões cisalhantes se dá de forma parabólica, chegando a nulidade nas bordas da seção, quando  $y = h/2$ .

De maneira geral, pode-se determinar as tensões de cisalhamento através da fórmula:

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \text{Eq. 2.12}$$

Onde:

$\tau$  = tensão de cisalhamento no ponto distante  $y'$  da linha neutra. Por simplificação, admite-se que essa tensão é constante por toda a largura do elemento;

$V$  = esforço cortante no ponto considerado;

$Q = \int A' y dA' = \bar{y}' A'$ , em que  $A'$  é a parte inferior ou superior da área da seção transversal e  $\bar{y}'$  é a distância da linha neutra até o centroide de  $A'$ ;

$I$  = momento de inércia de área da seção transversal com relação ao eixo centroidal;

$t$  = largura da área da seção transversal medida no ponto referente ao cálculo da tensão;

Utilizando a Eq. (2.12) e aplicando as propriedades referentes às seções retangulares, obtém-se:

$$Q = \bar{y}' A' = \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] \left( \frac{h}{2} - y \right) b = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) b$$

Substituindo na Eq. (2.12):

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left( \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) b \right)}{\left( \frac{1}{12} b h^3 \right) b} \quad \text{Eq. 2.13}$$

Simplificando a Eq. (2.13):

$$\tau = \frac{6V}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{Eq. 2.14}$$

Sabendo que a tensão de cisalhamento máxima ocorre na linha neutra, ou seja, quando  $y = 0$ , obtém-se a fórmula para a tensão máxima:

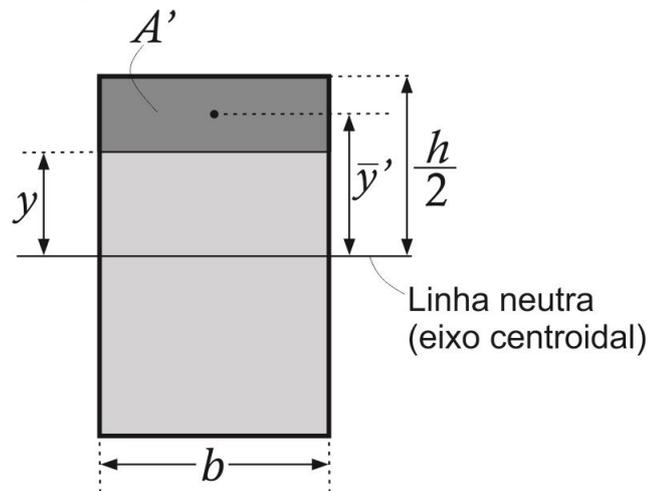
$$\tau = \frac{6V}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \tau = \frac{6V}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - 0^2 \right) = \frac{6Vh^2}{4bh^3} \Rightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{3V}{2bh} \quad \text{Eq. 2.15}$$

Como  $A = bh$ , chega-se, por fim, à seguinte expressão:

$$\tau_{m\acute{a}x} = 1,5 \cdot \frac{V}{A} \quad \text{Eq. 2.16}$$

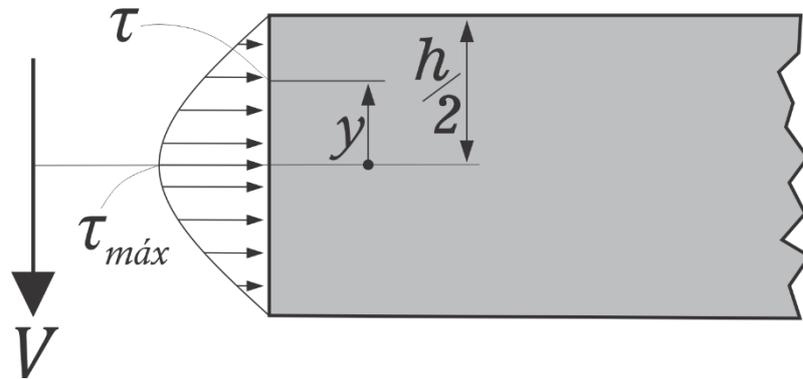
Comparando as Eqs. 2.2 e 2.16, nota-se que a tensão de cisalhamento máxima é 50% maior que a tensão de cisalhamento média. A Fig. 2.15 mostra a seção transversal e seus dados relevantes. Já a Fig. 2.16 mostra a distribuição de tensões de cisalhamento em uma seção transversal de viga retangular.

Figura 2.15 – Seção transversal da viga.



Fonte: adaptada de HIBBELER (2010), p. 265.

Figura 2.16 – Distribuição de tensões de cisalhamento na seção transversal da viga.



Fonte: adaptada de HIBBELER (2010), p. 265.

## 2.4 O Princípio de Saint-Venant

Segundo HIBBELER (2010), quando um elemento estrutural (barra) sofre aplicação de carga axial concentrada agindo ao longo do seu centroide, as deformações e tensões que surgem nas regiões próximas ao ponto de aplicação da carga e também nos apoios são maiores do que em outras regiões do elemento, gerando uma distorção na distribuição de tensões. Contudo, à medida em que a região de análise se afasta destes pontos críticos, as tensões tendem a tornar-se uniformes em toda a seção.

A distância com relação ao ponto de aplicação de carga e também com relação aos apoios, a qual uma seção deve estar, de modo que as deformações localizadas provocadas pela carga concentrada sejam desprezíveis pode ser determinada por modelos matemáticos com base na teoria da elasticidade. Entretanto, como simplificação, essa distância pode ser considerada como, no mínimo, igual à maior dimensão da seção transversal. Essa distância se baseia observações experimentais.

Conforme BEER (1995), o Princípio de Saint-Venant não se aplica somente aos casos de carga axial, mas sim à qualquer tipo de carregamento.

Em resumo, HIBBELER (2010), define o Princípio de Saint-Venant da seguinte maneira:

O Princípio de Saint-Venant afirma que os efeitos localizados causados por qualquer carga que age sobre um corpo serão dissipados ou atenuados em regiões suficientemente afastadas do ponto de aplicação da carga. Além do mais, a distribuição de tensão resultante nessas regiões será a mesma que a causada por qualquer outra carga estaticamente equivalente aplicada ao corpo dentro da mesma área localizada. (HIBBELER, 2010. p. 86)

Assim, configura-se como objetivo central deste trabalho a análise das tensões nas regiões próximas ao ponto de aplicação da carga concentrada e, pelo explanado nesta seção, há embasamento na Resistência dos Materiais para o prosseguimento deste estudo.

### **3 CONCEITOS E FORMULAÇÕES DA TEORIA DA ELASTICIDADE**

#### **3.1 Considerações iniciais**

De acordo com o exposto anteriormente, na seção referente às formulações da Resistência dos Materiais sobre o problema central deste trabalho, ou seja, da análise de tensões em regiões próximas ao ponto de aplicação de carga concentrada em vigas, nota-se evidente que, conforme o Princípio de Saint-Venant, tal análise deve ser realizada de forma específica, pois as equações da teoria elementar de vigas não alcançam resultados tão próximos das tensões reais nessas regiões da viga. Desse modo, nessa seção, abordar-se-á, de maneira sucinta, os conceitos da Teoria da Elasticidade sobre tal fenômeno.

#### **3.2 Efeitos da atuação de carga concentrada em vigas**

Casos de vigas carregadas com forças concentradas ocorrem, de certa forma, com grande recorrência, configurando-se como um caso de grande relevância na engenharia civil. Pode-se citar aqui, as vigas de transição de edifícios, onde por motivo de concepção estrutural e compatibilidade arquitetônica, servem como apoio para pilares. Tais pilares não podem ter origem diretamente nas fundações, sendo assim, transmitem as cargas provenientes diretamente à viga que lhe serve de apoio.

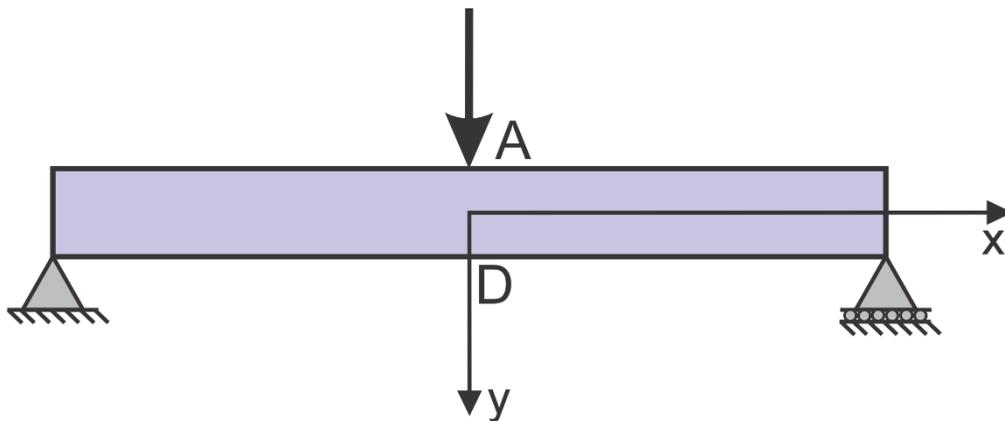
Nas vigas onde a distribuição de cargas é distribuída ao longo de seu comprimento, a distribuição de tensões pode ser analisada pelas equações da teoria de flexão da Resistência dos Materiais, obtendo resultados satisfatórios, não carecendo de análises mais aprofundadas. No caso de atuação de carga concentrada, tal força produz perturbações na distribuição de tensões na região próxima ao ponto de aplicação, demandando um estudo mais detalhado.

Carus Wilson, citado em TIMOSHENKO (1980), foi pioneiro no estudo das tensões produzidas pela aplicação de cargas concentradas, realizando experimentos com uma viga de vidro biapoiada, sendo o ponto de incidência da carga o ponto

médio da superfície superior (Fig. 3.1). A carga aplicada é normal ao bordo superior da viga.

Lançando mão do uso de luz polarizada, tal pesquisador verificou que a distribuição de tensões, no ponto A (ponto de aplicação da carga), nesse caso, se assemelha à que ocorre em uma chapa semi-infinita com condições semelhantes de carregamento.

Figura 3.1 – Esquema estático da viga.



Fonte: elaborada pelo autor.

Carus Wilson pôde concluir ainda que, ao longo da seção AD, a distribuição de tensão normal  $\sigma_x$  não apresenta linearidade e que, no ponto D, no bordo inferior e oposto a A, o esforço de tração existente apresenta valor menor do que o obtido pelas equações da teoria elementar de flexão de vigas, da Resistência dos Materiais. Os resultados obtidos foram explanados com embasamento em algumas hipóteses empíricas de G.G. Stokes<sup>1</sup>.

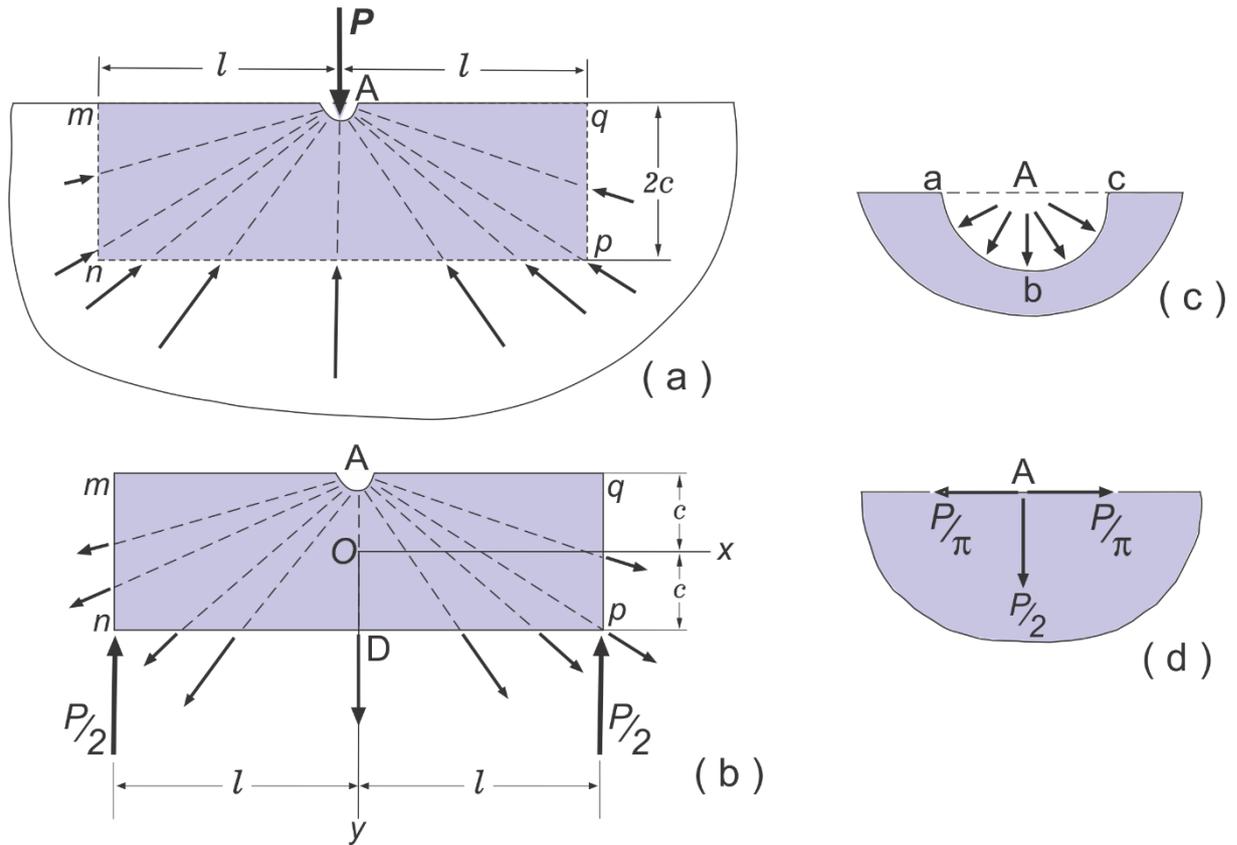
Uma outra maneira de obter os mesmos efeitos do sistema apresentado na Fig. 3.1 é realizando uma associação (ou superposição) de dois sistemas, conforme o exposto na Fig. 3.2. Nas seções *mn*, *np* e *pq*, de uma chapa semi-infinita, ocorrem tensões radiais de compressão, como demonstra a Fig. 3.2(a). Eis que atuam, nos bordos da viga, tensões radiais de tração de mesmos módulos, que tendem a anular as tensões de compressão, como mostra a Fig. 3.2(b).

Superpondo as tensões de compressão na chapa semi-infinita e as tensões de tração na viga retangular, aproxima-se do caso analisado por G.G. Stokes.

---

<sup>1</sup> George Gabriel Stokes (1819-1903), matemático e físico irlandês.

Figura 3.2 – Superposição de tensões na chapa semi-infinita e na viga retangular.



Fonte: adaptado de TIMOSHENKO (1980), p. 100.

Na obtenção das tensões da viga, utiliza-se a fórmula elementar de flexão. Já o momento fletor atuante na seção transversal  $AD$  é calculado levando em conta o momento reativo gerado por  $P/2$ , subtraindo-se o momento oriundo das forças de tração radiais atuantes em uma metade da viga.

O momento gerado pelas forças radiais de tração pode ser calculado identificando que estas são estaticamente equivalentes à distribuição de tensões sobre a região pertencente ao quadrante  $ab$  da superfície  $abc$  no ponto  $A$ , conforme demonstra a Fig. 3.2(c). Desse modo, verifica-se que tal distribuição de tensões equivale a uma força  $P/\pi$  de direção horizontal, acrescida de uma força  $P/2$  vertical, ambas aplicadas no ponto  $A$ .

Dessa maneira, o momento fletor, ou seja, o momento com relação ao ponto  $O$ , é:

$$\frac{P}{2} \cdot l - \frac{P}{\pi} \cdot c \quad \text{Eq. 3.1}$$

E ainda, as tensões de flexão são:

$$\sigma'_x = \frac{P}{I} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y \quad \text{Eq. 3.2}$$

Às tensões de flexão devem ser acrescentadas de uma parcela decorrente da tensão de tração distribuída uniformemente  $P/(2 \cdot \pi \cdot c)$ , originada da força de tração  $P/\pi$ . Obtém-se, portanto, as tensões normais ao longo da seção transversal  $AD$ :

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2c\pi} \quad \text{Eq. 3.3}$$

A expressão (3.3) é igual à obtida por Stokes. Tal expressão foi validada, de maneira experimental e observando suas limitações, através de modernas técnicas fotoelásticas.

Pode-se obter melhores aproximações quando se considera a atuação de uma carga contínua e distribuída, aplicada no bordo inferior da viga. O módulo deste carregamento, no ponto  $D$ , é  $P/c\pi$ , de modo que se obtém:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left( \frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2c\pi} + \frac{P}{c\pi} \left( \frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \quad \text{Eq. 3.4}$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2c\pi} + \frac{P}{c\pi} \left( \frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \quad \text{Eq. 3.5}$$

Acrescentando, por superposição, as tensões para uma chapa semi-infinita, obtendo, portanto, as tensões totais ao longo da seção  $AD$ .

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi(c+y)}$$

As equações citadas fornecem excelente aproximação em todos os pontos ao longo da seção  $AD$ , com exceção dos resultados obtidos para o ponto  $D$ . Neste ponto, verifica-se uma correção à fórmula elementar de viga, fornecida então como:

$$-\frac{3P}{2c\pi} + \frac{P}{2c\pi} + \frac{P}{5c\pi} = -0,254 \cdot \frac{P}{c} \quad \text{Eq. 3.6}$$

de modo que realizando-se uma verificação mais aprofundada, obtém-se

$$-0,133 \cdot \frac{P}{c}$$

T. V. Kármán e F. Seewald, conforme o exposto por BEER (1996), realizaram estudos mais minuciosos sobre a distribuição de tensões e da curvatura próximas ao ponto de aplicação de cargas concentradas.

Kármán utiliza-se da consideração de uma viga infinita longitudinalmente e aplica a solução para o modelo de chapa semi-infinita, tendo dois conjugados iguais e opostos atuando em dois pontos próximos ao seu bordo reto. As tensões na face inferior podem ser consideradas nulas se levada em conta uma solução na forma de série trigonométrica, representada, para uma viga infinita longitudinalmente, como uma integral de Fourier. Assim, obtém-se a seguinte função:

$$\phi = \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \cosh \alpha c + \sinh \alpha c) \cdot \cosh \alpha y - \sinh \alpha c \sinh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c + 2\alpha c} \cos \alpha x d\alpha$$

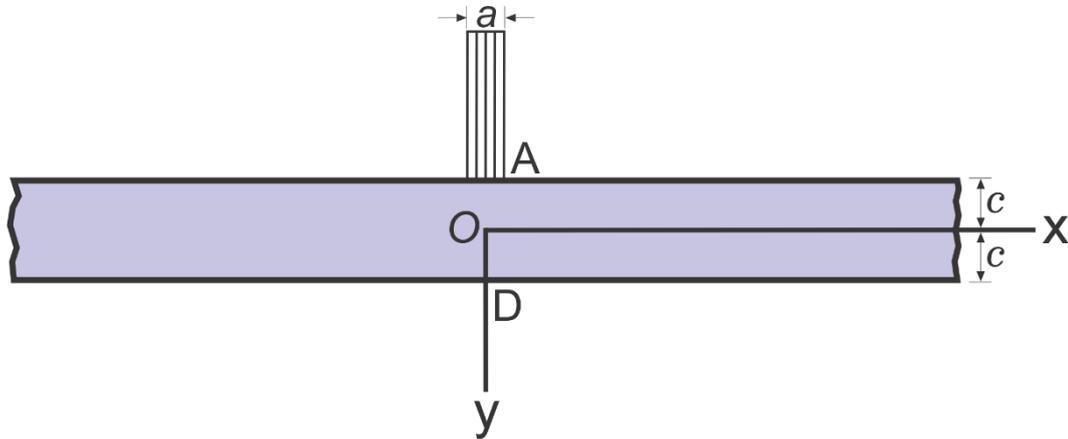
$$- \frac{Ma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha c \sinh \alpha c + \cosh \alpha c) \cdot \sinh \alpha y - \cosh \alpha c \cosh \alpha y \cdot \alpha y}{\sinh 2\alpha c - 2\alpha c} \cos \alpha x d\alpha$$

Eq. 3.7

A função (Eq. 3.7) apresenta, quando o diagrama de momentos fletores possui a forma de um retângulo extremamente estreito, a distribuição de tensões na viga. Para casos generalizados de cargas atuando na vertical, na direção normal, sobre a face superior da viga, os diagramas de momentos fletores correspondentes podem ser divididos em retângulos elementares, conforme o mostrado na Fig. 3.3.

Com relação a função de tensão, a mesma é obtida integrando-se a expressão ao longo do comprimento da viga.

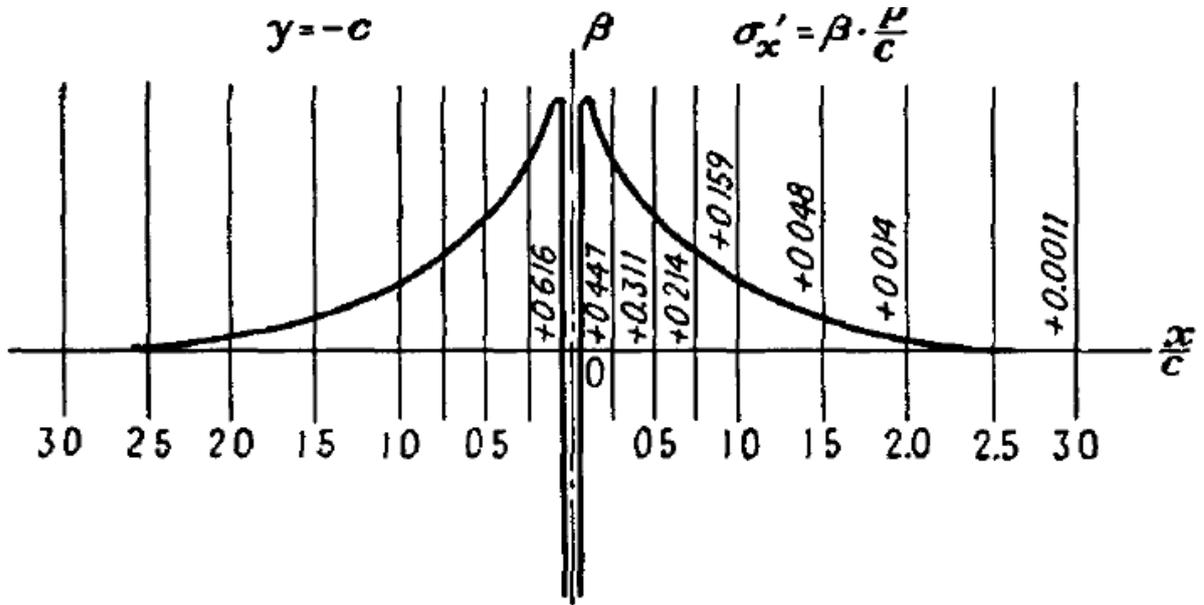
Figura 3.3 – Diagrama de momentos fletores dividido em retângulos elementares.



Fonte: adaptado de TIMOSHENKO (1980), p. 102

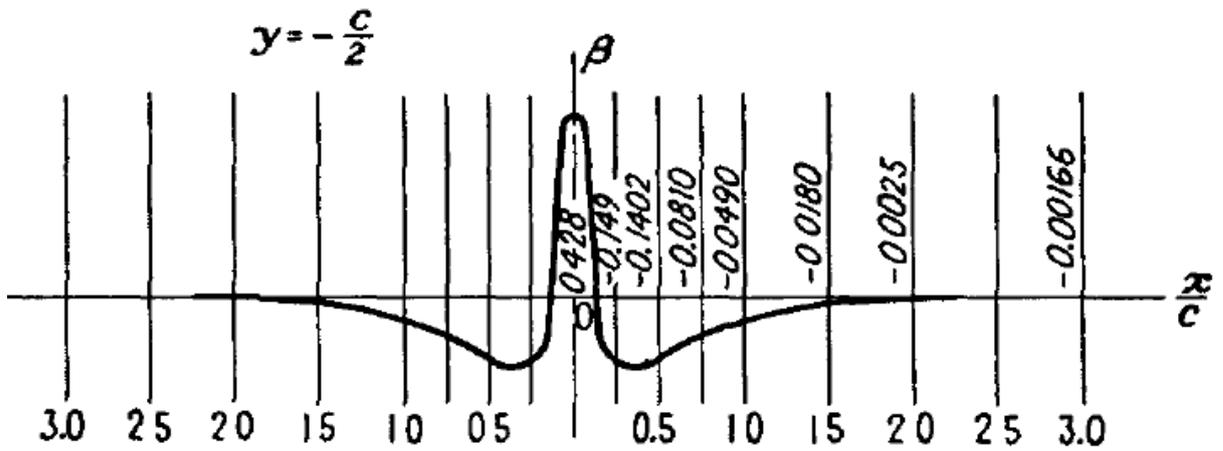
Seewald aplicou esse método de solução à vigas carregadas por uma função concentrada  $P$ , conforme o caso exposto na Fig. 3.1. Seewald demonstra, portanto, que a tensão  $\sigma_x$  pode ser expressa através da soma de duas parcelas, sendo uma delas oriunda da aplicação da fórmula elementar de vigas e, a outra, originária do efeito local, devido à proximidade do ponto de aplicação da carga. A segunda parcela, chamada de  $\sigma'_x$ , pode ser expressa na forma  $\beta(P/c)$ , sendo  $\beta$  um fator numérico obtido em função da posição do ponto para o qual se faz a análise de tensões. Os valores de  $\beta$  são mostrados nas Figs. 3.4. As outras duas componentes de tensão  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , também podem ter parcelas apresentadas na forma  $\beta(P/c)$ . Os correspondentes valores de  $\beta$  para as tensões de cisalhamento são expostos nas Figs. 3.5.

Figura 3.4a – Valores de  $\beta$  para tensões normais na superfície  $-c$ .



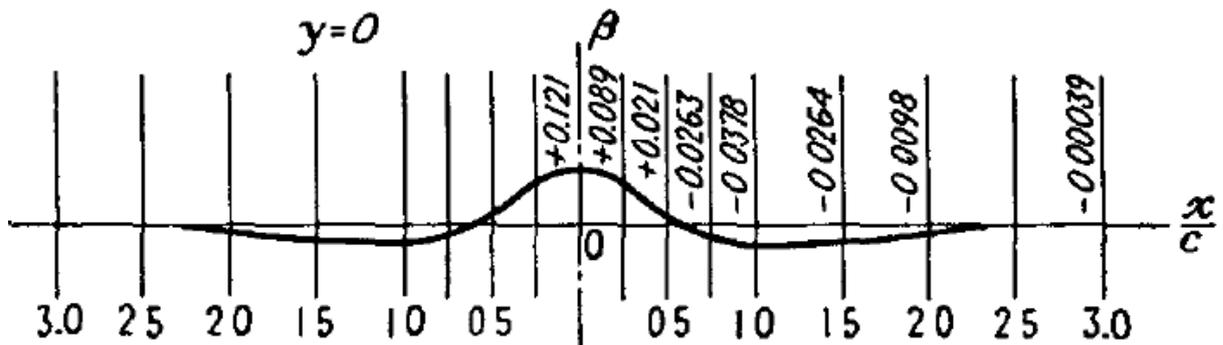
Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 103.

Figura 3.4b – Valores de  $\beta$  para tensões normais na superfície  $-c/2$ .



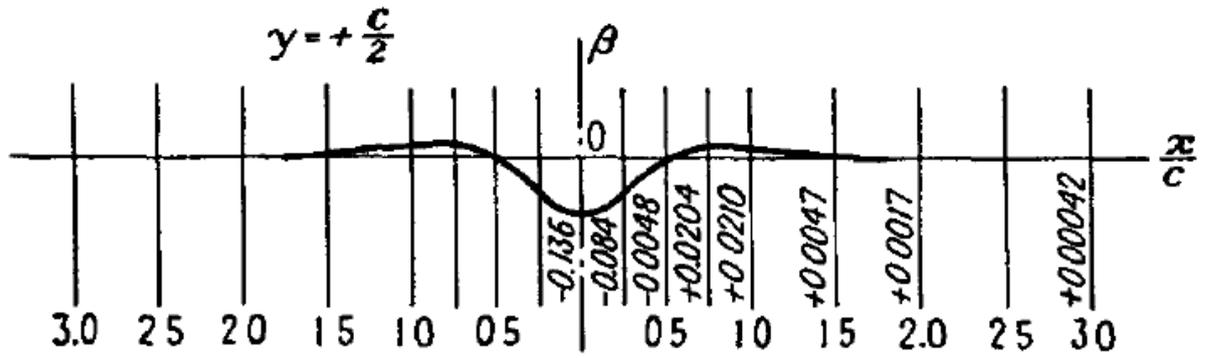
Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 103.

Figura 3.4c – Valores de  $\beta$  para tensões normais na superfície  $0c$ .



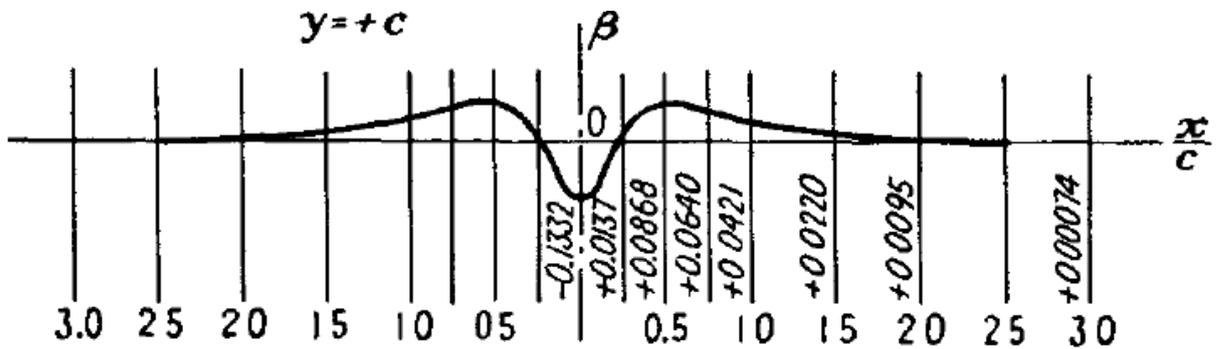
Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 103.

Figura 3.4d – Valores de  $\beta$  para tensões normais na superfície  $+c/2$ .



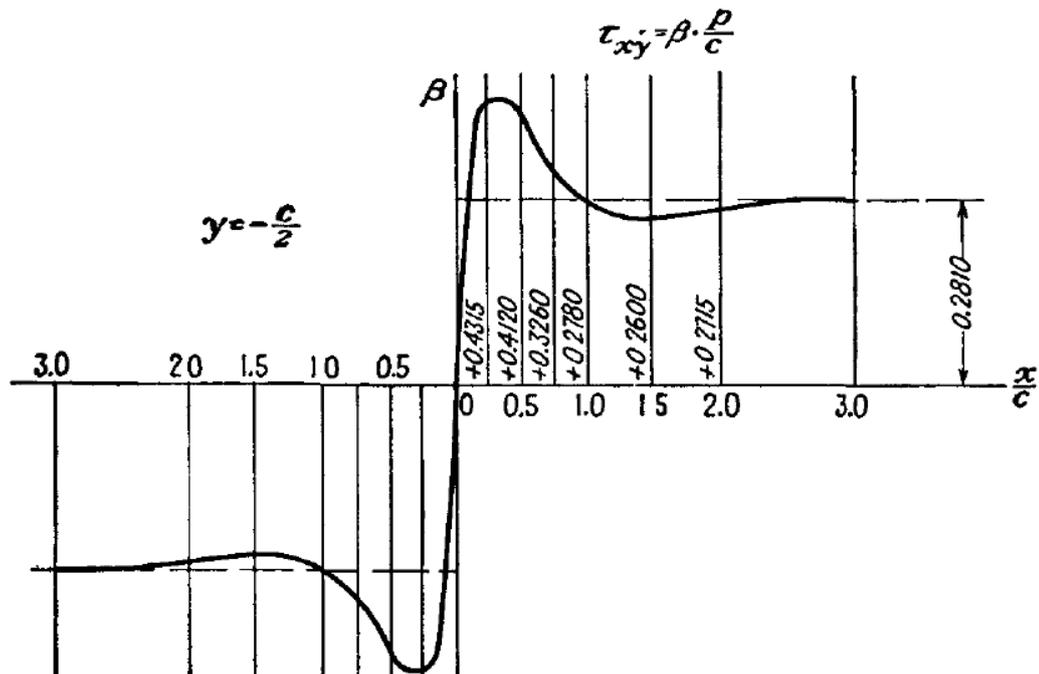
Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 103.

Figura 3.4e – Valores de  $\beta$  para tensões normais na superfície  $+c$ .



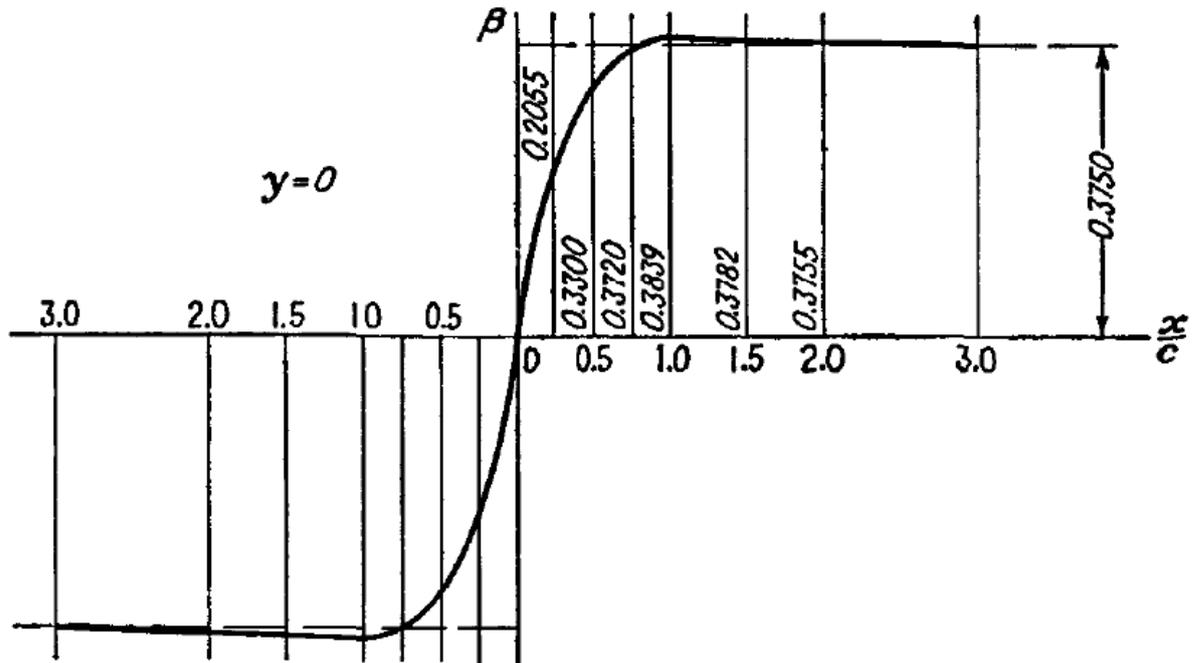
Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 103.

Figura 3.5a – Valores de  $\beta$  para tensões de cisalhamento na superfície  $-c/2$ .



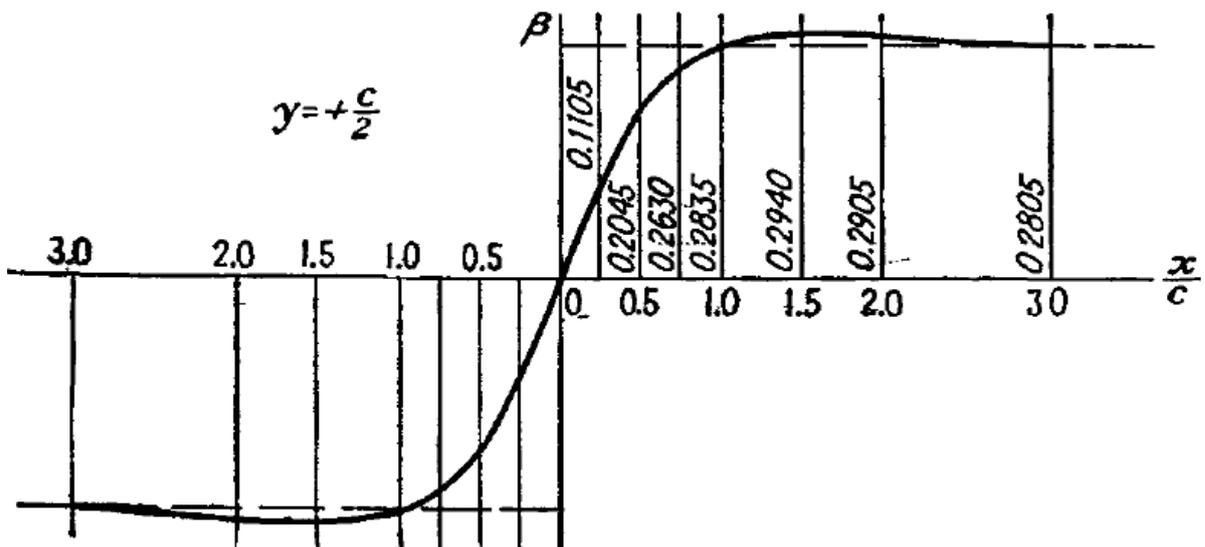
Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 105.

Figura 3.5b – Valores de  $\beta$  para tensões de cisalhamento na superfície  $0c$ .



Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 105.

Figura 3.5c – Valores de  $\beta$  para tensões de cisalhamento na superfície  $+c/2$ .



Fonte: TIMOSHENKO (1980), p. 105.

Com as figuras 3.4 e 3.5 pode-se proceder a determinação das tensões na viga para esse caso particular, ou seja, respeitando as mesmas condições de vinculação externa e de carregamento. Através dos valores de  $\beta$ , realiza-se a adição

de uma parcela de tensão aos valores determinados previamente através das equações expostas no capítulo 3 deste trabalho, chegando assim ao que se propõe na formulação proposta por TIMOSHENKO (1980).

## 4 CONCEITOS E FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Na aplicação deste método será utilizado o elemento plano quadrilateral quadrático da família *Serendipity* de continuidade  $C_0$ , usando a formulação isoparamétrica do Método dos Elementos Finitos<sup>2</sup>. Este elemento será utilizado no cálculo de tensões de chapas planas no estado plano de tensões. São denominados elementos de chapa aqueles cujas cargas externas atuam no seu plano, de modo que não haja nenhuma componente dessas cargas normal a este, conseqüentemente não provocando nenhum deslocamento fora desse plano e, ainda, que não sejam incluídas rotações de nenhum ponto do plano da chapa. Será realizado um teste da performance deste elemento para a obtenção de tensões em vigas. A formulação isoparamétrica será apresentada neste capítulo com a introdução de um método de aproximação, visto a seguir.

### 4.1 Um método de aproximação

Segundo OLIVEIRA (2013), existem vários métodos numéricos que podem ser aplicados para a obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais. Tais métodos são denominados de métodos de aproximação. Abordar-se-á, neste capítulo, um método de aproximação desenvolvido com base no método dos resíduos ponderados na forma de Galerkin<sup>3</sup>.

Seja encontrar uma solução para  $\phi$  em  $\Omega$  que satisfaça a seguinte equação diferencial,

$$A(\phi) = L\phi + p = 0 \quad \text{Eq. 4.1}$$

onde  $L$  é um operador diferencial linear e  $p$  é independente de  $\phi$ .

---

<sup>2</sup> A exposição de conceitos sobre o Método dos Elementos Finitos deste trabalho está embasada, em grande parte, nas proposições feitas por OLIVEIRA (2013), em suas apostilas e notas de aula. Tal material, que consiste em extensa pesquisa e referenciada em grandes autores, teve seu uso para estudo e embasamento teórico autorizado e cedido, gentilmente, pelo próprio autor, o Prof. Dr. Wlamir Carlos de Oliveira.

<sup>3</sup> Boris Grigoryevich Galerkin (1871 – 1945), matemático e engenheiro soviético.

A equação diferencial (4.1) deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$B(\phi) = M\phi + r = 0, \text{ no contorno } \Gamma \quad \text{Eq. 4.2}$$

onde  $M$  é um operador linear e  $r$  é independente de  $\phi$ .

Um método de aproximação para obter uma solução aproximada  $\hat{\phi}$  de  $\phi$  consiste em fazer,

$$\phi \cong \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i \hat{\phi}_i \quad \text{Eq. 4.3}$$

Nesse método, o domínio  $\Omega$  do problema tem de ser dividido em vários subdomínios  $\Omega_e$ . A Eq. (4.3) é então aplicada em cada subdomínio, onde  $N_i$  são funções de interpolação que devem ser definidas em  $n$  pontos do subdomínio, tais que

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{no ponto } i \\ 0, & \text{nos demais pontos} \end{cases} \quad \text{Eq. 4.4}$$

## 4.2 Método dos Resíduos Ponderados

Aplicando o método de aproximação citado anteriormente, o método dos resíduos ponderados pode ser utilizado para obter as incógnitas da aproximação.

O método dos resíduos ponderados se aplica realizando:

$$\int_{\Omega} W_j R_{\Omega} d\Omega = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{Eq. 4.5}$$

onde  $W_j$  são funções de ponderação, e

$$R_{\Omega} \equiv A(\hat{\phi}) \equiv L\hat{\phi} + p \quad \text{Eq. 4.6}$$

é o resíduo da aproximação. Então,

$$\int_{\Omega} W_j(L\hat{\phi} + p)d\Omega = 0 \quad \text{Eq. 4.7}$$

cujo desenvolvimento resultará em

$$[K]\{a\} = \{f\} \quad \text{Eq. 4.8}$$

De acordo com as definições de Galerkin, as funções de ponderação  $W_j$  no método dos resíduos ponderados serão as próprias funções de interpolação  $N_j$  utilizadas na aproximação. Desse modo, fazendo  $W_j = N_j$  na Eq. (4.7), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_j(L\hat{\phi} + p)d\Omega = 0 \quad \text{Eq. 4.9}$$

### 4.3 Método de aproximação via Resíduos Ponderados

Para obter valores aproximados de  $\phi$  conforme o método de aproximação fornecido pela Eq. (4.3), aplicar-se-á o método dos resíduos ponderados na forma de Galerkin.

Nesse processo, o domínio do problema é subdividido em vários subdomínios. Na Eq. (4.3),  $n$  será o número de pontos de aproximação que deverá ser usado em cada subdomínio. Os subdomínios são chamados de elementos do domínio. Os pontos usados em cada elemento do domínio são chamados de nós do elemento. A ordem da aproximação de  $\phi$  dentro de cada elemento depende, portanto, do número de nós usados no elemento.

Nesse método de aproximação, o parâmetro  $\hat{\phi}_i$  representa o valor da aproximação de  $\phi$  no ponto  $i$ , pois escolhe-se  $N_i$ , tais que  $N_i = 1$  no ponto  $i$  e zero nos demais pontos do elemento. Esse método de aproximação irá satisfazer também as condições de contorno do problema, uma vez que serão usados na

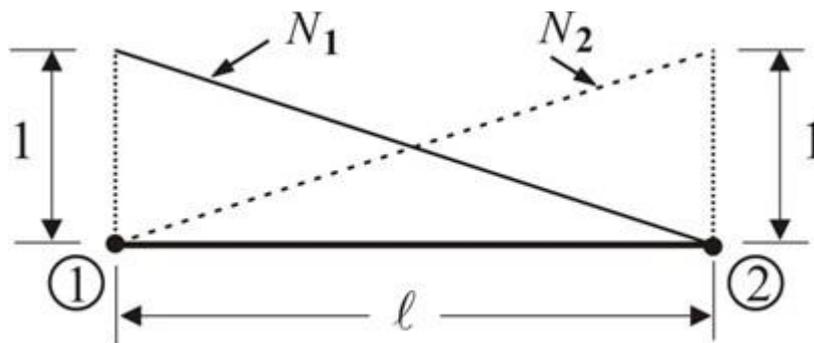
solução do problema os valores de  $\phi$  no contorno. Será necessário que, se a equação diferencial do problema contiver derivadas de ordem  $(2m)$ , então  $(2m - 1)$  deverá ser a ordem das funções de interpolação  $N_i$ . As condições de contorno do problema devem conter derivadas de ordem até  $(m - 1)$ , estabelecendo problemas de continuidade  $C_{m-1}$ .

No método de aproximação apresentado nesse capítulo, cada função  $N_i$  deve ser igual à 1 (um) no nó  $i$  e 0 (zero) nos demais nós do elemento (subdomínio).

Então, para dois pontos de aproximação ( $n = 2$ ), cada função  $N_i$  deve ser linear. As funções  $N_i$  no sistema global podem ser escritas como:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{\ell} \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{x}{\ell} \quad \text{Eq. 4.10}$$

Figura 4.1 – Elemento unidimensional com dois pontos nodais e valores pontuais das funções de interpolação.



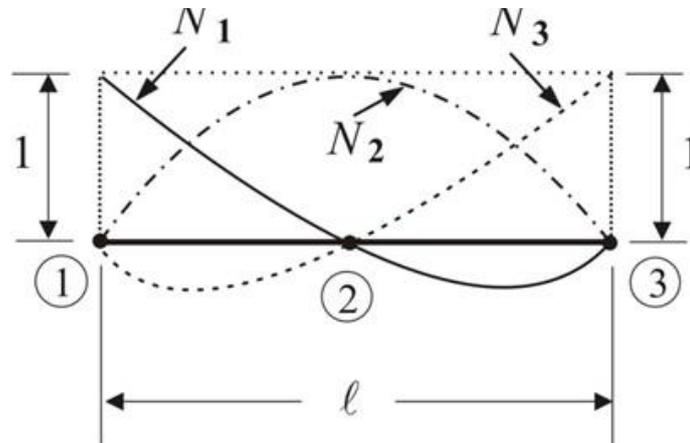
Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 12.

Observa-se na Fig. 4.1 que  $N_1 = 1$  no nó 1 e zero no nó 2 e que  $N_2 = 1$  no nó 2 e zero no nó 1, e ainda  $\sum_{i=1}^{n=2} N_i = 1$  (onde  $n$  é número de nós do elemento e  $N_i$  é a função do nó  $i$  do elemento).

Considerando-se aproximação quadrática ( $n = 3$ ), pode-se usar:

$$N_1 = 1 - \frac{3}{\ell}x + \frac{2}{\ell^2}x^2; \quad N_2 = \frac{4}{\ell^2}(\ell x - x^2); \quad N_3 = \frac{1}{\ell^2}(2x^2 - \ell x) \quad (4.11)$$

Figura 4.2 – Elemento unidimensional com três pontos nodais e valores pontuais das funções de interpolação.



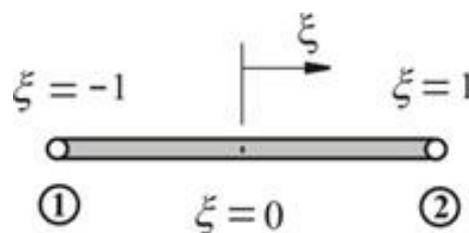
Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 13.

Evidencia-se que  $N_1 = 1$  no nó 1 e zero nos nós 2 e 3,  $N_2 = 1$  no nó 2 e zero nos nós 1 e 3,  $N_3 = 1$  no nó 3 e zero nos nós 1 e 2, e que  $\sum_{i=1}^3 N_i = 1$ .

O método dos elementos finitos se torna mais efetivo quando se adota sobre cada elemento um sistema local de coordenadas. As funções de interpolação definidas nesse sistema, em coordenadas naturais, podem ser utilizadas em qualquer elemento, independentemente do seu comprimento  $l$  e da sua posição em relação ao sistema global de coordenadas.

A coordenada natural do sistema local de coordenadas para problemas unidimensionais é denotada por  $\xi$ . Nesse sistema, essa coordenada varia, no elemento, de  $-1$  a  $1$ , como mostra a Fig. 4.3 para o domínio de um elemento de barra.

Figura 4.3 – Sistema de coordenadas locais para o domínio de um elemento de barra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nos casos mais elementares, como o mostrado na Fig. 4.3, a origem do sistema local coincide com o centro geométrico do elemento. Entretanto, esse conceito não se estende à elementos com geometria irregular.

Para cada elemento, as funções  $N_i$  são definidas em função de  $\xi$ . A abscissa  $x$  de um ponto qualquer da barra posicionada no sistema global de coordenadas, conforme Fig. 4.3, pode ser determinada em função da coordenada natural  $\xi$  do elemento, ou seja:

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi)x_i = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \quad \text{Eq. 4.12}$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são, respectivamente, a abscissa do primeiro e segundo nós do elemento, definidos no sistemas global de coordenadas.

O problema sendo unidimensional, o elemento tem dois pontos nodais. Então, as funções de interpolação  $N_i(\xi)$  que são usadas para interpolar a geometria do elemento, conforme a Eq. (4.12), devem ser lineares, ou seja

$$N_1(\xi) = a_1 + b_1\xi \quad \text{e} \quad N_2(\xi) = a_2 + b_2\xi \quad \text{Eq. 4.13}$$

Lançando mão da propriedade que as funções de interpolação necessitam ter o valor 1 (um) no nó onde elas são definidas e valor 0 (zero) nos outros nós, verifica-se para a função  $N_1(\xi)$ , que para  $\xi = -1 \Rightarrow N_1(\xi) = 1$  e para  $\xi = 1 \Rightarrow N_1(\xi) = 0$ , então,  $a_1 = 1/2$  e  $b_1 = -1/2$ . Logo, a função de forma para o primeiro nó é:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{Eq. 4.14}$$

Analogamente, a função de forma para o segundo nó do elemento, será:

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad \text{Eq. 4.15}$$

Ainda de acordo com o critério de Galerkin dos resíduos ponderados, cada função de ponderação  $W_j$  deve ser igual à função de interpolação  $N_j$  e que deve atender também as exigências de continuidade.

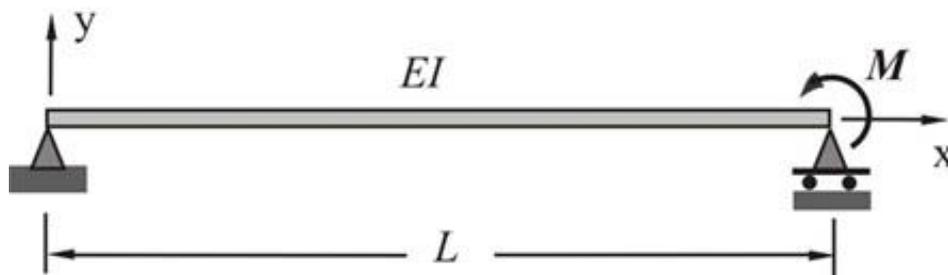
Conforme PINTO JÚNIOR (2006), características cruciais do Método de Galerkin são “a simplicidade, a generalidade e a sistematicidade tanto em termos de análise matemática quanto de análise numérica de convergência e estabilidade.” Além disso, é notável que o Método de Galerkin configura-se como método de aproximação de equações diferenciais consolidado e amplamente aplicado na Mecânica dos Sólidos.

Neste momento, para ilustração, é usado o método dos resíduos ponderados, para resolver os seguintes problemas:

1º Exemplo de aplicação do método:

Aplicar o método de aproximação dos resíduos ponderados via Galerkin para determinar a flecha no ponto central e a declividade nos apoios de uma viga biapoiada sujeita a um momento concentrado  $M$  na extremidade direita, como mostra a Fig. 4.4. Obter respostas para dois tipos de discretização: (a) com quatro subdomínios de ordem linear; (b) com dois subdomínios de ordem quadrática.

Figura 4.4 – Esquema estático da viga.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 37.

A equação diferencial do problema é

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = \frac{M}{L} x \quad (1)$$

onde  $M(x) = \frac{M}{L}x$  é o momento fletor na seção da viga distante  $x$  da sua extremidade esquerda.

Fazendo  $\phi = y$  em (1):

$$EI \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{M}{L}x = 0 \quad (2)$$

Comparando  $L\phi + p = 0$  com  $EI \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{M}{L}x = 0$ , identificamos que

$$L\phi = EI \frac{d^2\phi}{dx^2} \text{ e } p = -\frac{M}{L}x. \text{ Como } R_{\Omega} = L\hat{\phi} + p, \text{ então } R_{\Omega} = EI \frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2} - \frac{M}{L}x.$$

Da Eq. 4.7,

$$\int_0^{\ell} N_i \left( EI \frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2} - \frac{M}{L}x \right) dx = 0 \quad (3)$$

cuja solução será também da forma  $[K]\{\hat{\phi}\} = \{\hat{f}\}$ .

A integral em (3) será resolvida aplicando:

$$I = EI \int_0^{\ell} N_i \frac{d^2\hat{\phi}}{dx^2} dx - \int_0^{\ell} N_i \frac{M}{L}x dx = 0 \rightarrow I = (EI)I_1 - I_2 \quad (4)$$

A primeira integral tem resultado igual a:

$$I_1 = \left[ N_i \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^{\ell} - \int_0^{\ell} \frac{d\hat{\phi}}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx$$

$$\text{Em (4)} \rightarrow EI \left[ N_i \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^{\ell} - EI \int_0^{\ell} \frac{dN_i}{dx} \frac{d\hat{\phi}}{dx} dx - \int_0^{\ell} N_i \frac{M}{L}x dx = 0$$

ou seja:

$$\int_0^{\ell} \left( EI \frac{dN_i}{dx} \frac{d\hat{\phi}}{dx} + N_i \frac{M}{L}x \right) dx = EI \left[ N_i \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^{\ell} \quad (5)$$

Substituindo na integral em (5) as derivadas com relação à variável global  $x$  pelas derivadas com relação à variável local  $\xi$  e fazendo  $x = \sum_1^n N_i(\xi) x_i$ , tem-se:

$$\int_0^\ell \left( EI \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\hat{\phi}}{d\xi} + N_i(\xi) \frac{M}{L} \sum_1^n N_i(\xi) x_i \right) d\xi = EI \left[ N_i(\xi) \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^\ell \quad (6)$$

→ Solução para o item (a):

Considerando o subdomínio de comprimento  $\ell$  e funções de interpolação lineares no sistema local de coordenadas naturais, pode-se usar, então, para  $n = 2$ ,

$$N_1 = 1 - \frac{\xi}{\ell} \text{ e } N_2 = \frac{\xi}{\ell} \quad (7)$$

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i \hat{\phi}_i = N_1 \hat{\phi}_1 + N_2 \hat{\phi}_2 = \left( 1 - \frac{\xi}{\ell} \right) \hat{\phi}_1 + \frac{\xi}{\ell} \hat{\phi}_2 \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\xi} = -\frac{1}{\ell} \hat{\phi}_1 + \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_2 \quad (9)$$

Para  $i = 1 \rightarrow N_1 = 1 - \frac{\xi}{\ell}$  e  $\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{\ell}$

Em (6):

$$\int_0^\ell \left\{ EI \left( -\frac{1}{\ell} \right) \left( -\frac{1}{\ell} \hat{\phi}_1 + \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_2 \right) + \left( 1 - \frac{\xi}{\ell} \right) \frac{M}{L} \left[ \left( 1 - \frac{\xi}{\ell} \right) x_1 + \frac{\xi}{\ell} x_2 \right] \right\} d\xi = EI \left[ N_1 \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^\ell$$

cuja solução é

$$EI \left( \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_1 - \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_2 \right) + \frac{M\ell}{6L} (2x_1 + x_2) = EI \left[ N_1 \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^\ell$$

Assim,

$$EI \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_1 - EI \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_2 = -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{M\ell}{6L} (2x_1 + x_2) \quad (10)$$

Para  $i = 2 \rightarrow N_2 = \frac{\xi}{\ell}$  e  $\frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{\ell}$

Em (6):  $\int_0^\ell \left\{ EI \frac{1}{\ell} \left( -\frac{1}{\ell} \hat{\phi}_1 + \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_2 \right) + \frac{\xi}{\ell} \frac{M}{L} \left[ \left( 1 - \frac{\xi}{\ell} \right) x_1 + \frac{\xi}{\ell} x_2 \right] \right\} d\xi = EI \left[ N_2 \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^\ell$

Portanto,

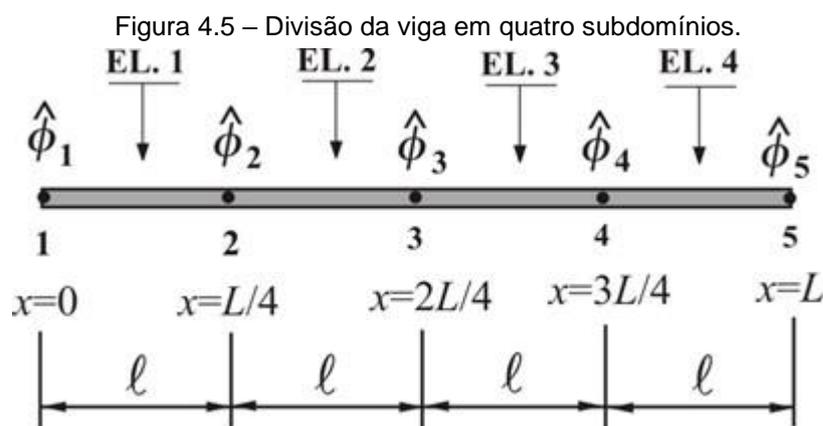
$$-EI \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_1 + EI \frac{1}{\ell} \hat{\phi}_2 = EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\ell} - \frac{M\ell}{6L} (x_1 + 2x_2) \quad (11)$$

Colocando as equações (10) e (11) na forma matricial encontra-se o sistema de equações para aproximação linear da função  $\phi$  no subdomínio de comprimento  $\ell$ , ou seja:

$$EI \begin{bmatrix} +\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{1}{\ell} & +\frac{1}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{M\ell}{6L} (2x_{1^\circ \text{nó}} + x_{2^\circ \text{nó}}) \\ +EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\ell} - \frac{M\ell}{6L} (x_{1^\circ \text{nó}} + 2x_{2^\circ \text{nó}}) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Sendo que  $x_{1^\circ \text{nó}}$  significa a abscissa global da enumeração do primeiro ponto nodal do elemento e  $x_{2^\circ \text{nó}}$  a abscissa global da enumeração do segundo ponto nodal do elemento.

A solução aproximada para o item (a) consiste em usar quatro subdomínios de ordem linear, como mostra a Fig. 4.5.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 41.

Para o 1º subdomínio:  $[K]_1 \{\hat{\phi}\}_1 = \{\hat{f}\}_1$

Em (12) com  $\ell = \frac{L}{4}$ ,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = \ell = \frac{L}{4}$  vem que:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +4 & -4 \\ -4 & +4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} & -\frac{ML}{96} \\ EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{4}} & -\frac{ML}{48} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Para o 2º subdomínio:  $[K]_2 \{\hat{\phi}\}_2 = \{\hat{f}\}_2$

Em (12) com  $\ell = \frac{L}{4}$ ,  $x_2 = \ell = \frac{L}{4}$  e  $x_3 = 2\ell = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}$ , vem que:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +4 & -4 \\ -4 & +4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{4}} & -\frac{ML}{24} \\ EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\frac{2L}{4}} & -\frac{5ML}{96} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Para o 3º subdomínio:  $[K]_3 \{\hat{\phi}\}_3 = \{\hat{f}\}_3$

Em (12) com  $\ell = \frac{L}{4}$ ,  $x_3 = 2\ell = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}$  e  $x_4 = 3\ell = \frac{3L}{4}$ , vem que:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +4 & -4 \\ -4 & +4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\frac{2L}{4}} & -\frac{7ML}{96} \\ EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\frac{3L}{4}} & -\frac{ML}{12} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Para o 4º subdomínio:  $[K]_4 \{\hat{\phi}\}_4 = \{\hat{f}\}_4$

Em (12) com  $\ell = \frac{L}{4}$ ,  $x_4 = 3\ell = \frac{3L}{4}$  e  $x_5 = 4\ell = \frac{4L}{4} = L$ , vem que:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} +4 & -4 \\ -4 & +4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\frac{3L}{4}} & -\frac{5ML}{48} \\ EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=L} & -\frac{11ML}{96} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Fazendo o acoplamento dos quatro subdomínios, basta agrupar as equações (13), (14), (15) e (16) em uma só equação. Dessa forma,

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{ML}{96} \\ -\frac{ML}{16} \\ -\frac{ML}{8} \\ -\frac{9ML}{48} \\ EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=L} - \frac{11ML}{96} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

que é a equação para a deformação da viga sem considerar as condições de contorno do problema.

As condições de contorno são:  $\phi = 0$  em  $x = 0$  e  $\phi = 0$  em  $x = L$ .

Fazendo  $\hat{\phi} \Big|_{\Gamma} = \phi \Big|_{\Gamma}$ , e usando as condições de contorno, tem-se  $\hat{\phi}_1 = 0$  e  $\hat{\phi}_5 = 0$ . Consequentemente, o sistema da Eq. (17) torna-se:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ML}{16} \\ -\frac{ML}{8} \\ -\frac{9ML}{48} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

cuja solução é

$$\begin{Bmatrix} \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5ML^2}{128EI} \\ -\frac{ML^2}{16EI} \\ -\frac{7ML^2}{128EI} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

O valor aproximado da flecha no centro da viga é  $\hat{\phi}_3 = -\frac{ML^2}{16EI}$ .

Inserindo as condições de contorno e os valores de  $\hat{\phi}_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) na primeira e na última equação do sistema (17), encontra-se:

$$\left. \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{ML}{6EI} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right|_{x=L} = \frac{ML}{3EI} \quad (20)$$

que correspondem às declividades aproximadas da viga em  $x=0$  e  $x=L$ , respectivamente.

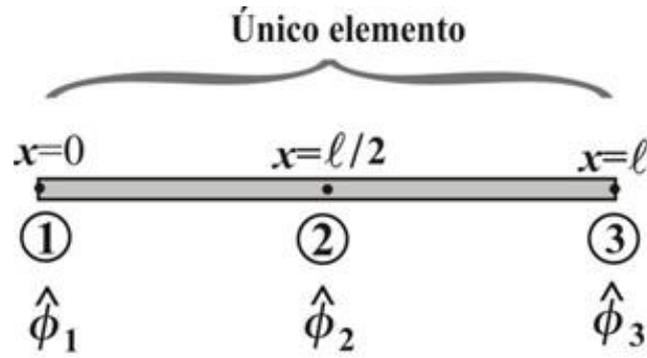
→ Solução para o item (b):

Neste item as funções de interpolação são do tipo quadráticas. Cada subdomínio deve possuir, então, três pontos de aproximação ( $n = 3$ ). As funções de interpolação são as mesmas das Eqs. (4.11), porém substituindo a variável  $x$  pela variável  $\xi$ , tal que  $\xi$ , varia, em cada elemento, de 0 à 1 ( $0 \leq \xi \leq \ell$ ).

$$N_1 = 1 - \frac{3}{\ell}\xi + \frac{2}{\ell^2}\xi^2; \quad N_2 = \frac{4}{\ell^2}(\ell\xi - \xi^2) \quad \text{e} \quad N_3 = \frac{1}{\ell^2}(2\xi^2 - \ell\xi)$$

A Fig. 4.6 mostra o subdomínio de três nós ( $n = 3$ ).

Figura 4.6 – Subdomínio de três pontos nodais.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 45.

$$\hat{\phi}_e = \sum_{i=1}^3 N_i \hat{\phi}_i$$

$$\hat{\phi} = \left(1 - \frac{3}{l}\xi + \frac{2}{l^2}\xi^2\right)\hat{\phi}_1 + \frac{4}{l^2}(l\xi - \xi^2)\hat{\phi}_2 + \frac{1}{l^2}(2\xi^2 - l\xi)\hat{\phi}_3 \quad (20)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\xi} = \left(-\frac{3}{l} + \frac{4}{l^2}\xi\right)\hat{\phi}_1 + \frac{4}{l^2}(l - 2\xi)\hat{\phi}_2 + \frac{1}{l^2}(4\xi - l)\hat{\phi}_3 \quad (21)$$

Para  $i = 1 \rightarrow N_1 = 1 - \frac{3}{l}\xi + \frac{2}{l^2}\xi^2$  e  $\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{3}{l} + \frac{4}{l^2}\xi$

Em (6), vem

$$\int_0^l \left\{ EI \left( -\frac{3}{l} + \frac{4}{l^2}\xi \right) \left[ \left( -\frac{3}{l} + \frac{4}{l^2}\xi \right) \hat{\phi}_1 + \frac{4}{l^2}(l - 2\xi)\hat{\phi}_2 + \frac{1}{l^2}(4\xi - l)\hat{\phi}_3 \right] \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{3}{l}\xi + \frac{2}{l^2}\xi^2 \right) \frac{M}{L} \left[ \left( 1 - \frac{3}{l}\xi + \frac{2}{l^2}\xi^2 \right) x_1 + \frac{4}{l^2}(l\xi - \xi^2)x_2 + \frac{1}{l^2}(2\xi^2 - l\xi)x_3 \right] \right\} d\xi \\ = EI \left[ N_1 \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^l$$

cuja solução é

$$\frac{7EI}{3l}\hat{\phi}_1 - \frac{8EI}{3l}\hat{\phi}_2 + \frac{EI}{3l}\hat{\phi}_3 = -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{2l}{15} \frac{M}{L} x_1 - \frac{l}{15} \frac{M}{L} x_2 + \frac{l}{30} \frac{M}{L} x_3 \quad (22)$$

Para  $i = 2 \rightarrow N_2 = \frac{4}{l^2}(l\xi - \xi^2)$  e  $\frac{dN_2}{d\xi} = \frac{4}{l^2}(l - 2\xi)$

Em (6), vem

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left\{ EI \frac{4}{l^2} (l - 2\xi) \left[ \left( -\frac{3}{l} + \frac{4}{l^2} \xi \right) \hat{\phi}_1 + \frac{4}{l^2} (l - 2\xi) \hat{\phi}_2 + \frac{1}{l^2} (4\xi - l) \hat{\phi}_3 \right] \right. \\
& \left. + \frac{4}{l^2} (l\xi - \xi^2) \frac{M}{L} \left[ \left( 1 - \frac{3}{l} \xi + \frac{2}{l^2} \xi^2 \right) x_1 + \frac{4}{l^2} (l\xi - \xi^2) x_2 + \frac{1}{l^2} (2\xi^2 - l\xi) x_3 \right] \right\} d\xi \\
& = \left[ N_2 \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^l \\
& \quad \therefore \\
& -\frac{8EI}{3l} \hat{\phi}_1 + \frac{16EI}{3l} \hat{\phi}_2 - \frac{8EI}{3l} \hat{\phi}_3 = -\frac{l}{15} \frac{M}{L} x_1 - \frac{8l}{15} \frac{M}{L} x_2 - \frac{l}{15} \frac{M}{L} x_3 \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\text{Para } i=3 \rightarrow N_3 = \frac{1}{l^2} (2\xi^2 - l\xi) \text{ e } \frac{dN_3}{d\xi} = \frac{1}{l^2} (4\xi - l)$$

Em (6), vem

$$\begin{aligned}
& \int_0^l \left\{ EI \frac{1}{l^2} (4\xi - l) \left[ \left( -\frac{3}{l} + \frac{4}{l^2} \xi \right) \hat{\phi}_1 + \frac{4}{l^2} (l - 2\xi) \hat{\phi}_2 + \frac{1}{l^2} (4\xi - l) \hat{\phi}_3 \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{l^2} (2\xi^2 - l\xi) \frac{M}{L} \left[ \left( 1 - \frac{3}{l} \xi + \frac{2}{l^2} \xi^2 \right) x_1 + \frac{4}{l^2} (l\xi - \xi^2) x_2 + \frac{1}{l^2} (2\xi^2 - l\xi) x_3 \right] \right\} d\xi \\
& = \left[ N_3 \frac{d\hat{\phi}}{dx} \right]_0^l
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{EI}{3l} \hat{\phi}_1 - \frac{8EI}{3l} \hat{\phi}_2 + \frac{7EI}{3l} \hat{\phi}_3 = EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=l} + \frac{l}{30} \frac{M}{L} x_1 - \frac{l}{15} \frac{M}{L} x_2 - \frac{2l}{15} \frac{M}{L} x_3 \quad (24)$$

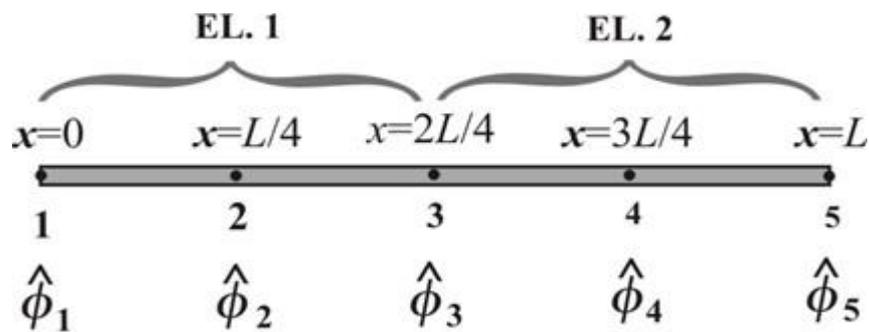
Dispondo as equações (22), (23) e (24) na forma matricial, o sistema de equações para um subdomínio de comprimento  $l$  é

$$\frac{EI}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{2l}{15} \frac{M}{L} x_{1^\circ \text{nó}} - \frac{l}{15} \frac{M}{L} x_{2^\circ \text{nó}} + \frac{l}{30} \frac{M}{L} x_{3^\circ \text{nó}} \\ - \frac{l}{15} \frac{M}{L} x_{1^\circ \text{nó}} - \frac{8l}{15} \frac{M}{L} x_{2^\circ \text{nó}} - \frac{l}{15} \frac{M}{L} x_{3^\circ \text{nó}} \\ + EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=l} + \frac{l}{30} \frac{M}{L} x_{1^\circ \text{nó}} - \frac{l}{15} \frac{M}{L} x_{2^\circ \text{nó}} - \frac{2l}{15} \frac{M}{L} x_{3^\circ \text{nó}} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

sendo que  $x_{1^\circ \text{nó}}$ ,  $x_{2^\circ \text{nó}}$  e  $x_{3^\circ \text{nó}}$  correspondem à abscissa global da enumeração do primeiro, segundo e terceiro pontos nodais de cada elemento, respectivamente.

Neste item, a solução do problema consiste na utilização de dois subdomínios de ordem quadrática. A Fig. 4.7 mostra o domínio discretizado em dois subdomínios.

Figura 4.7 – Domínio discretizado em dois subdomínios.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 47.

Para o 1º subdomínio:

Levando  $l = \frac{L}{2}$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{L}{4}$  e  $x_3 = \frac{L}{2}$  na equação (25),

$$\frac{2EI}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} \\ - \frac{ML}{12} \\ + EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=L/2} - \frac{ML}{24} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Para o 2º subdomínio:

Levando  $\ell = \frac{L}{2}$ ,  $x_3 = \frac{L}{2}$ ,  $x_4 = \frac{3L}{4}$  e  $x_5 = L$  na equação (25),

$$\frac{2EI}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=\frac{L}{2}} - \frac{ML}{24} \\ -\frac{ML}{4} \\ +EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=L} - \frac{ML}{12} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Utilizando as equações (26) e (27), o sistema de equações para o domínio é

$$\frac{2EI}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \\ \hat{\phi}_4 \\ \hat{\phi}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=0} \\ -\frac{ML}{12} \\ -\frac{ML}{12} \\ -\frac{ML}{4} \\ EI \frac{d\hat{\phi}}{dx} \Big|_{x=L} - \frac{ML}{12} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Condições de contorno  $\begin{cases} \phi = 0 & \text{em } x = 0 \\ \phi = 0 & \text{em } x = L \end{cases}$

Fazendo  $\hat{\phi} \Big|_{\Gamma} = \phi \Big|_{\Gamma}$ , então  $\hat{\phi}_1 = 0$  e  $\hat{\phi}_5 = 0$ . Usando (28), a flecha no centro da viga é  $\hat{\phi}_3 = -\frac{ML^2}{16EI}$ . A declividade nos apoios é determinada através da

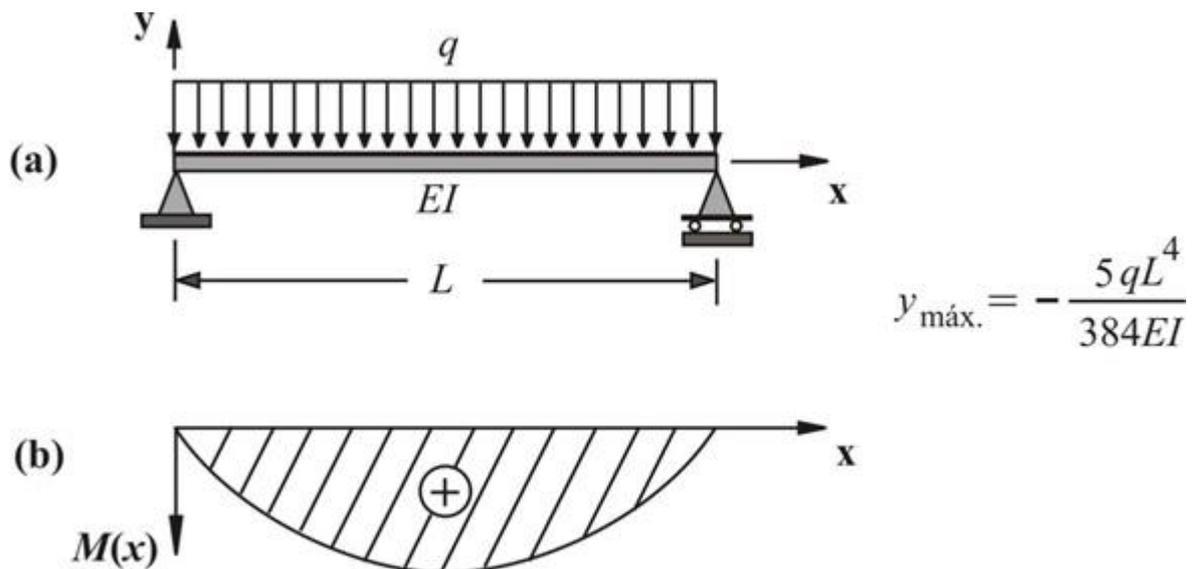
primeira e quinta equações do sistema (28) que resulta em  $\frac{d\hat{\phi}}{dx}\Big|_{x=0} = -\frac{ML}{6EI}$  e

$$\frac{d\hat{\phi}}{dx}\Big|_{x=L} = \frac{ML}{3EI}.$$

2º exemplo de aplicação do método:

O objetivo deste exemplo é demonstrar como o método exposto na seção anterior pode ser usado para obter uma solução aproximada de um problema físico. Tal problema consiste na determinação do deslocamento vertical  $y(x)$  para uma viga biapoiada sujeita a um carregamento constante  $q$ . A viga e seu diagrama de momento fletor são mostrados na Fig. 4.8.

Figura 4.8 – Esquema estático da viga (a) e diagrama de momento fletor (b).



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 53.

A equação diferencial da viga é

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (1)$$

com as condições de contorno:

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad (2)$$

O coeficiente  $EI$  representa a resistência da viga à flexão e  $M(x)$  é a equação do momento fletor. Neste exemplo,  $M(x) = qxL/2 - qx^2/2$ .

Uma equação aproximada para o deslocamento vertical da viga que atende as condições de contorno é:

$$y(x) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (3)$$

onde  $A$  é um coeficiente a ser determinado.

A solução exata da equação diferencial, para pequenas deformações, é:

$$y(x) = \frac{q}{24EI} (-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \quad (4)$$

No Método de Galerkin, a integral  $\int W_i(x)R(x)dx$  é avaliada usando para  $W_i(x)$  as mesmas funções que são usadas para a solução aproximada. Neste exemplo, há somente uma função de ponderação,  $W_i(x) = \operatorname{sen} \pi x/L$ . A integral da equação do resíduo é:

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \left[ -EI \frac{A\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} - (qxL/2 - qx^2/2) \right] dx = 0$$

A integração produz

$$-\frac{EI\pi^2}{2L} A - \frac{2qL^3}{\pi^3} = 0$$

logo,

$$A = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \quad (14)$$

e a solução aproximada é

$$y(x) = -\frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (15)$$

#### 4.4 Conceituação do Método dos Elementos Finitos

Ainda segundo OLIVEIRA (2013), o Método dos Elementos Finitos é um procedimento numérico para resolver problemas físicos regidos por equações diferenciais ou teoremas de energia. O método tem duas características que distinguem de outros procedimentos numéricos:

- (a) O método utiliza uma formulação de integral para gerar um sistema de equações algébricas.
- (b) O método usa funções contínuas seccionalmente para a aproximação das variáveis físicas, que no caso de problemas unidimensionais de continuidade  $C_0$ , onde  $0 \leq \xi \leq l$ .

O método dos elementos finitos pode ser dividido em seis passos básicos. Estes passos são listados aqui e ilustrados nas próximas seções, de acordo com OLIVEIRA (2013):

- (1) Discretizar a região. Inclui, neste passo, a localização e numeração dos pontos nodais bem como especificar suas coordenadas.
- (2) Especificar a equação para a aproximação das variáveis físicas. Esta equação é escrita em termos das variáveis físicas do elemento. Dependendo do grau das funções de interpolação, define-se o número de graus de liberdade do elemento.
- (3) Desenvolver o sistema de equações. Usando o método de Galerkin, é avaliada a integral dos resíduos ponderados. Na formulação da energia potencial, a energia do sistema é escrita em função dos deslocamentos nodais e depois é minimizado com relação a esses deslocamentos.
- (4) Fazer o acoplamento das equações a nível global. Inclui, neste passo, a entrada das condições de contorno.
- (5) Resolver o sistema de equações.
- (6) Calcular as quantidades de interesse a nível de elemento.

A aplicação do método dos elementos finitos na solução de alguns problemas referentes à cálculo de tensões, como proposto nesse trabalho, será vista adiante.

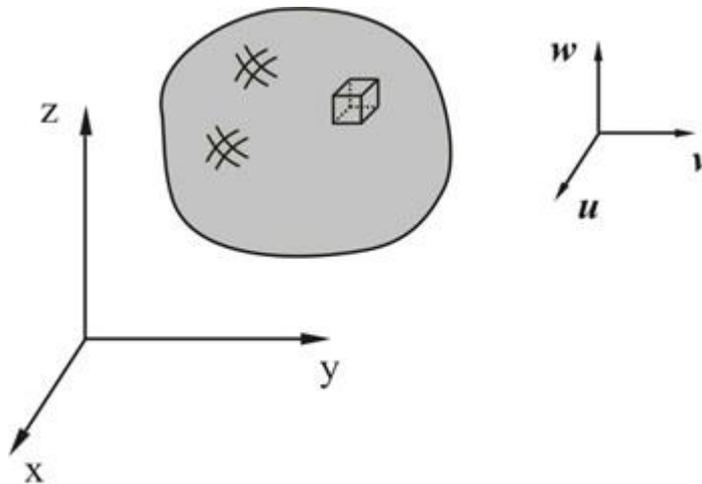
## 4.5 Estado Plano de Tensões e Deformações

Nesta seção ver-se-á as equações fundamentais da teoria da elasticidade linear aplicadas no método dos elementos finitos no caso de se utilizar elementos bidimensionais. Elementos bidimensionais são elementos planos tais que duas coordenadas são necessárias para definir a posição de um ponto na superfície do elemento. Os elementos são conectados por nós comuns ao longo de lados comuns para formar estruturas planas contínuas. Elementos planos são muito importantes para a análise no estado plano de tensões e deformações.

### 4.5.1 Equações Básicas da Elasticidade Linear

A Fig. 4.9 mostra um elemento infinitesimal de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  e o campo de deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  do elemento.

Figura 4.9 – Elemento infinitesimal e seu campo de deslocamentos.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 175.

O vetor de deformações do elemento, usando as equações de deslocamento na elasticidade linear tridimensional, é dado por

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.16}$$

As equações constitutivas (ou equações tensões-deformações) para sólidos elásticos lineares homogêneos são dadas pela Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos como,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2G)\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.17}$$

onde,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Eq. 4.18}$$

sendo,

$E$  ... módulo de elasticidade longitudinal do material

$G$  ... módulo de elasticidade transversal do material

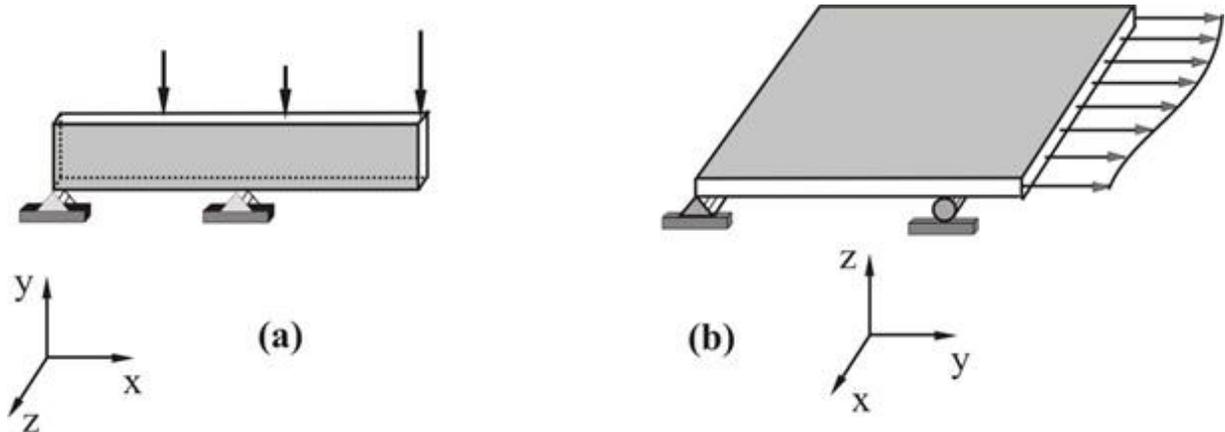
$\nu$  ... coeficiente de Poisson

#### 4.5.2 Estado Plano de Tensões

Estado plano de tensões é definido ser um estado de tensões no qual a tensão normal e as tensões de cisalhamento perpendiculares ao plano são consideradas nulas. Por exemplo, as figuras 4.10(a) e 4.10(b) mostram que as

chapas são submetidas a carregamentos no plano  $xy$ , a tensão  $\sigma_z$  e as tensões de cisalhamento  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são consideradas nulas. Geralmente, no estado plano de tensões, a dimensão do corpo na direção  $z$  é pequena comparada com a dimensão nas direções no plano  $xy$ .

Figura 4.10 – Chapas submetidas a carregamentos no plano  $xy$ .



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 177.

Como  $\sigma_z = 0$  e  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , as tensões não nulas são representadas por

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.19}$$

e são funções somente de  $x$  e  $y$ . As componentes das correspondentes deformações são:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.20}$$

Então, apenas as componentes  $u$  e  $v$  dos deslocamentos serão consideradas. A deformação na direção  $z$  é função das deformações nas direções  $x$  e  $y$  e pode ser calculada por:

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \text{Eq. 4.21}$$

Usando as equações (4.18) e (4.21), as equações (4.17) para o estado plano de tensões, tornam-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad \text{Eq. 4.22a}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \text{Eq. 4.22b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad \text{Eq. 4.22c}$$

ou,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.23}$$

Na forma matricial compacta, a Eq. 4.23 pode ser apresentada como:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad \text{Eq. 4.24}$$

onde,

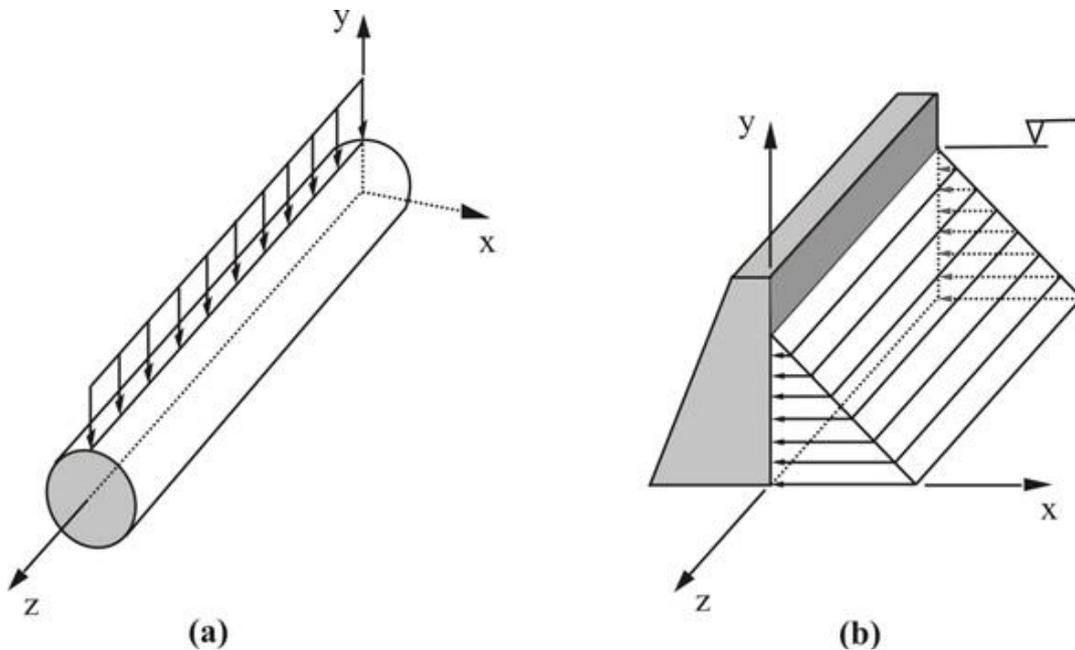
$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.25}$$

é chamada de matriz de elasticidade ou matriz constitutiva.

### 4.5.3 Estado Plano de Deformações

O estado plano de deformações é definido por um estado de deformações no qual a deformação  $\varepsilon_z$  normal ao plano  $xy$  e as deformações de cisalhamento  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são consideradas nulas. Na direção  $z$ , a área da seção reta do corpo é constante. As cargas agem somente nas direções  $x$  e/ou  $y$  e não variam na direção  $z$ . As figuras 4.11(a) e 4.11(b) mostram dois exemplos de estruturas submetidas ao estado plano de deformações.

Figura 4.11 – Estruturas submetidas ao estado plano de deformações.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 179.

Pode-se assumir que o deslocamento  $w$  na direção  $z$  é desprezível e que os deslocamentos  $u$  e  $v$  são funções somente de  $x$  e  $y$ . Então,  $\varepsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  e as tensões são agrupadas similarmente como no estado plano de tensões, isto é,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.26}$$

A tensão normal  $\sigma_z$  depende das outras componentes e pode ser calculada por

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{Eq. 4.27}$$

Neste caso, as equações (2.17) se tornam,

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_x + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_y \quad \text{Eq. 4.28a}$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_x + \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_y \quad \text{Eq. 4.28b}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad \text{Eq. 4.28c}$$

Colocando as equações (4.28) na forma dada pela Eq. (4.24), a matriz de elasticidade para o estado plano de deformações é,

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.29}$$

## 4.6 Elementos Isoparamétricos e Integração Numérica

Objeto de estudo desta seção é a formulação isoparamétrica<sup>4</sup> do método dos elementos finitos aplicada na análise do estado plano de tensões. Serão utilizados

---

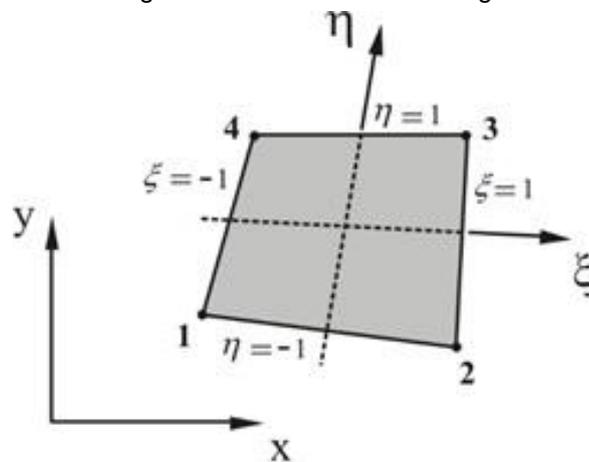
<sup>4</sup> Formulação na qual as funções de interpolação da forma (geometria) do elemento são as mesmas utilizadas para interpolar as variáveis físicas do problema.

elementos da família *Serendipity*<sup>5</sup>. Para determinar os elementos das matrizes, será utilizado o método numérico conhecido por quadratura de Gauss-Legendre.

#### 4.6.1 Elemento Quadrilateral Isoparamétrico de Taig

O elemento de Taig possui quatro nós, como mostrado na Fig. 4.12.

Figura 4.12 – Elemento de Taig.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 249.

As funções de interpolação para este elemento são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.30}$$

Em problemas de continuidade  $C_0$  na análise do estado plano de tensões e deformações, as variáveis físicas são os deslocamentos  $u$  e  $v$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, definidas pelas seguintes aproximações:

---

<sup>5</sup> Nome inglês relativo à habilidade de fazer descobertas por acaso. Tal denominação deriva do fato de que essa família de elementos possui suas funções de interpolação originalmente determinadas através de tentativas.

$$u = \sum_1^4 N_i u_i \quad \text{e} \quad v = \sum_1^4 N_i v_i \quad \text{Eq. 4.31}$$

Na formulação isoparamétrica, as funções  $N_j$  são as mesmas utilizadas para interpolar a geometria do elemento, ou seja:

$$x = \sum_1^4 N_i x_i \quad \text{e} \quad y = \sum_1^4 N_i y_i \quad \text{Eq. 4.32}$$

O campo das variáveis do elemento é:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\}_e \quad \text{Eq. 4.33}$$

Onde:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.34}$$

e

$$\{d\}_e = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_4 \quad v_4\}^T \quad \text{Eq. 4.35}$$

#### 4.6.2 Matriz de Rigidez do Elemento

$$[K]_e = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{Eq. 4.36}$$

O vetor de deformações é:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.37}$$

Derivando os deslocamentos  $u$  e  $v$  da equação (4.31) com relação às coordenadas globais  $x$  e  $y$ , tem-se que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \quad \text{Eq. 4.38a}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \quad \text{Eq. 4.38b}$$

Utilizando as equações (4.38), a Eq. (4.37) pode ser reescrita como

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.39}$$

ou, simplesmente:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}_e \quad \text{Eq. 4.40}$$

Como as funções de forma são definidas em função das coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$  do sistema local, deve-se fazer:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{Eq. 4.41a}$$

e

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad \text{Eq. 4.41b}$$

que na forma matricial, tornam-se:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.42}$$

A matriz quadrada da equação (4.42) é a matriz jacobiana que relaciona a derivada das funções  $N_i$  com relação às coordenadas globais com a derivada de  $N_i$  com relação às coordenadas naturais, ou seja,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.43}$$

As derivadas das funções  $N_i$  com relação a  $x$  e  $y$  podem ser determinadas usando a equação (4.42), fazendo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.44}$$

Os elementos da matriz jacobiana  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}$  e  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta}$  são obtidos pelas derivadas de  $x$  e  $y$  dadas pelas equações (4.30) com relação às coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$  do sistema local, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_1^4 N_i x_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_1^4 N_i y_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sum_1^4 N_i x_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sum_1^4 N_i y_i \right) = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i\end{aligned}\tag{Eq. 4.45}$$

A matriz jacobiana, Eq. (4.43), é então:

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}\tag{Eq. 4.46}$$

ou,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}\tag{Eq. 4.47}$$

Fazendo uso da inversa de  $[J]$  na Eq. (4.44) obtém-se, portanto, as derivadas  $\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}}$  e  $\frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{y}}$ . Com estas derivadas pode-se determinar a matriz da equação (4.39) para obter a matriz  $[B]$  da equação 4.40 como:

$$[B(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.48}$$

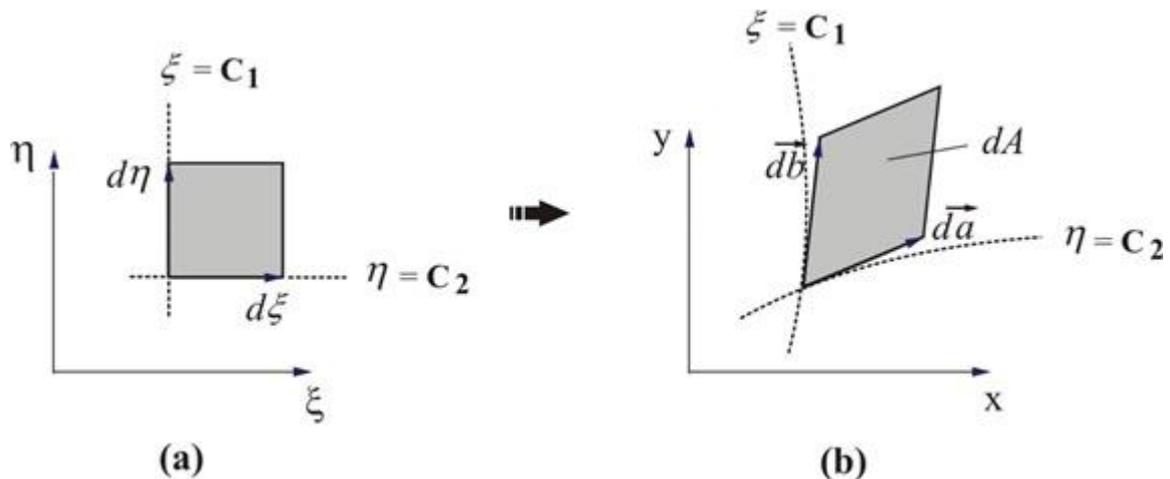
Para determinar a matriz de rigidez do elemento, Eq. (4.36), falta expressar o volume elementar  $dV$  no sistema global de coordenadas. Na análise do estado plano de tensões e de deformações, o elemento de volume  $dV$  é:

$$dV = t dA \quad \text{Eq. 4.49}$$

onde  $t$  é a espessura do elemento e  $dA$  é o elemento de área no sistema global.

Posteriormente, há se fazer a transformação da área elementar  $dA$  do sistema global para a área elementar no sistema local. A Fig. 4.13 mostra a área  $dA$  nos sistemas local e global de coordenadas, conforme ZIENKIEWICZ (1977):

Figura 4.13 – Área  $dA$  no sistema local (a) e no sistema global (b) de coordenadas.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 255.

Os vetores diferenciais  $d\vec{a}$  e  $d\vec{b}$  são:

$$d\vec{a} = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \hat{\xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \hat{\eta}$$

Eq. 4.50

$$d\vec{b} = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\xi \hat{\xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \hat{\eta}$$

O diferencial de área  $dA$  no sistema global pode ser expresso como sendo,

$$dA = (d\vec{a} \times d\vec{b}) \cdot \hat{\zeta}$$

Eq. 4.51

onde  $\hat{\zeta}$  é o vetor unitário normal ao plano formado pelos vetores diferenciais  $d\vec{a}$  e  $d\vec{b}$ .

Substituindo os vetores diferenciais da equação (4.50) na equação (4.51), tem-se que:

$$dA = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} d\xi d\eta - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} d\xi d\eta \right)$$

Eq. 4.52

O elemento de área  $dA$  da equação (4.52) é, portanto:

$$dA = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta$$

Eq. 4.53

A expressão entre parênteses da equação (4.53) representa o determinante da matriz jacobiana definida na equação (4.43). Portanto a equação (4.53) pode ser reescrita como:

$$dA = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

Eq. 4.54

ou simplesmente

$$dA = \det[J] d\xi d\eta \quad \text{Eq. 4.55}$$

onde o jacobiano (determinante da matriz jacobiana) é

$$\det[J] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.56}$$

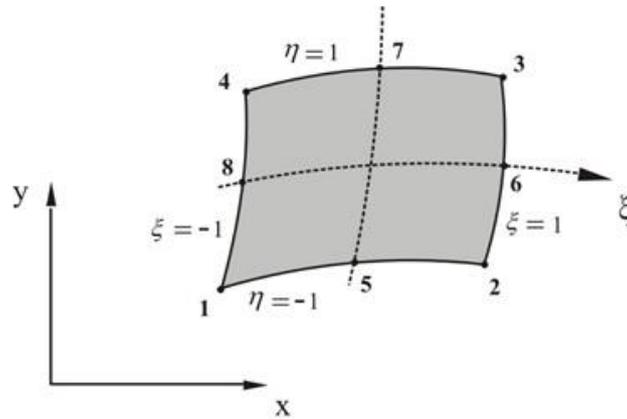
Assim, o elemento de volume  $dV$  dado pela equação (4.49) é  $dV = t dA = t \det[J] d\xi d\eta$  e, desse modo, a matriz de rigidez do elemento é definida como:

$$[K]_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad \text{Eq. 4.57}$$

#### **4.7 Elemento Plano Quadrilateral Isoparamétrico Quadrático da Família Serendipity**

Um elemento amplamente utilizado na análise do estado plano é mostrado na Fig. 4.14. Esse elemento tem oito nós no contorno. As funções de interpolação devem ser, portanto, quadráticas.

Figura 4.14 – Elemento plano quadrilateral com oito pontos nodais.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 268.

Com a utilização das variáveis

$$\xi_0 = \xi \xi_i \quad \text{e} \quad \eta_0 = \eta \eta_i \quad (i = 1, \dots, 8) \quad \text{Eq. 4.58}$$

as funções de forma *Standard* da família *Serendipity* são dadas por:

Nós dos cantos ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad \text{Eq. 4.59}$$

Nós do meio dos lados:

$$\text{Em } \xi_i = 0 \Rightarrow N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad \text{Eq. 4.60a}$$

$$\text{Em } \eta_i = 0 \Rightarrow N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta^2)(1 + \xi_0) \quad \text{Eq. 4.60b}$$

#### 4.7.1 Matriz de Rigidez do Elemento

A matriz de rigidez do elemento é dada por:

$$[K]_e = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{Eq. 4.61}$$

Como as funções de forma do elemento são definidas em coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$  do sistema local,

$$[K]_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [D][B(\xi, \eta)] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad \text{Eq. 4.62}$$

onde  $t$  é a espessura constante do elemento.

A matriz  $[B(\xi, \eta)]$  se torna,

$$[B(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \dots & \frac{\partial x}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.63}$$

A matriz jacobiana é a mesma matriz definida anteriormente pela equação (4.43), ou seja,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4.64}$$

sendo que, para esse caso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_1^8 N_i x_i \right) = \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_1^8 N_i y_i \right) = \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sum_1^8 N_i x_i \right) = \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \sum_1^8 N_i y_i \right) = \sum_1^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.65}$$

As derivadas  $\partial N_i/\partial x$  e  $\partial N_i/\partial y$  que aparecem na equação (4.63) são determinadas pela equação (4.44), ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 4.66}$$

#### 4.8 Integração Numérica Unidimensional

Seja a integral  $I$  definida por

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi \quad \text{Eq. 4.67}$$

onde  $G(\xi)$  é um polinômio de ordem  $p$  da forma

$$G(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p \quad \text{Eq. 4.68}$$

Comparando a equação (4.68) com a equação (4.67), tem-se que

$$I = \int_{-1}^1 (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p) d\xi$$

cuja solução analítica é:

$$I = \alpha_0 \xi \Big|_{-1}^1 + \alpha_1 \frac{\xi^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \alpha_2 \frac{\xi^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \dots + \alpha_p \frac{\xi^{p+1}}{p+1} \Big|_{-1}^1$$

$$I = 2\alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \dots + \frac{\alpha_p}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}] \quad \text{Eq. 4.69}$$

A quadratura de Gauss consiste em aproximar a solução da integral  $I$ , de tal forma que

$$I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi = W_1 G(\xi_1) + W_2 G(\xi_2) + \dots + W_n G(\xi_n) \quad \text{Eq. 4.70}$$

onde  $n$  é o número de pontos de integração ou pontos de Gauss,  $\xi_i$  é o valor da coordenada natural do ponto  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e  $W_i$  é a ponderação do ponto  $i$ .

Inserindo  $G(\xi)$  da equação (4.68) para  $\xi = \xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) na equação (4.70), tem-se que

$$\begin{aligned} I \cong & W_1(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) + \\ & W_2(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2 + \dots + \alpha_p \xi_2^p) + \dots + \\ & W_n(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \alpha_2 \xi_n^2 + \dots + \alpha_p \xi_n^p) \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.71}$$

Ainda de acordo com OLIVEIRA (2013), comparando as equações (4.71) e (4.69), evidencia-se que:

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + \dots + W_n &= 2 \\ W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_n \xi_n &= 0 \\ W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_n \xi_n^2 &= \frac{2}{3} \\ &\vdots \\ W_1 \xi_1^p + W_2 \xi_2^p + \dots + W_n \xi_n^p &= \frac{1}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}] \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.72}$$

No sistema da equação (4.72), há  $n$  valores de  $W$ ,  $n$  valores de  $\xi$ , e  $2n$  incógnitas. Como, nesse sistema, há  $(p+1)$  equações, então, uma solução sempre será possível quando  $2n = p+1$ . Portanto, a quadratura de Gauss integra exatamente um polinômio de grau  $p$  com  $n$  pontos de integração, sendo:

$$n = \frac{p+1}{2} \quad \text{Eq. 4.73}$$

Utilizando a equação (4.73), constrói-se a Tabela 4.1:

Tabela 4.1 – Grau do polinômio a ser integrado em função do número de pontos de integração.

Nº ( $n$ ) de pontos de integração	Grau ( $p$ ) do polinômio a ser integrado
1	1
2	3
3	5
4	7

Do sistema da equação (4.72), tem-se que:

a) Para um ponto de integração ( $n = 1 \Rightarrow p = 1$ ):

$$\begin{aligned} W_1 &= 2 \\ W_1 \xi_1 &= 0 \Rightarrow \xi_1 = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.74}$$

b) Para dois pontos de integração ( $n = 2 \Rightarrow p = 3$ ):

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= 2 \\ W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 &= 0 \\ W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 &= \frac{2}{3} \\ W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.75}$$

que formam um sistema não linear de equações, cuja solução é

$$\begin{aligned} W_1 &= W_2 = 1 \\ \xi_1 &= -\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,57735027 \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.76}$$

c) Para três pontos de integração ( $n = 3 \Rightarrow p = 5$ ):

$$\begin{aligned}
 W_1 + W_2 + W_3 &= 2 \\
 W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + W_3 \xi_3 &= 0 \\
 W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + W_3 \xi_3^2 &= \frac{2}{3} \\
 W_1 \xi_1^3 + W_2 \xi_2^3 + W_3 \xi_3^3 &= 0 \\
 W_1 \xi_1^4 + W_2 \xi_2^4 + W_3 \xi_3^4 &= \frac{2}{5} \\
 W_1 \xi_1^5 + W_2 \xi_2^5 + W_3 \xi_3^5 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 4.77}$$

A solução do sistema não linear da equação (4.77) é:

$$\begin{aligned}
 W_1 = W_3 &= \frac{5}{9} = 0,555555556 \\
 W_2 &= \frac{8}{9} = 0,888888889 \\
 \xi_1 = -\xi_3 &= -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0,77459667 \\
 \xi_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 4.78}$$

Esse procedimento deverá ser utilizado para determinar as coordenadas naturais  $\xi_i$  e os pesos  $W_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) para outros valores de  $n$ .

#### 4.9 Integração numérica em duas dimensões

Continuando com o embasamento teórico em OLIVEIRA (2013), para obter a integral

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta
 \tag{Eq. 4.79}$$

utilizando a quadratura de Gauss, avalia-se a integral interna fazendo  $\eta$  constante, isto é,

$$\int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta) = F(\eta) \quad \text{Eq. 4.80}$$

Avaliando a integral externa de maneira similar,

$$I = \int_{-1}^1 F(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^n W_j F(\eta_j) = \sum_{j=1}^n W_j \sum_{i=1}^n W_i G(\xi_i, \eta_j)$$

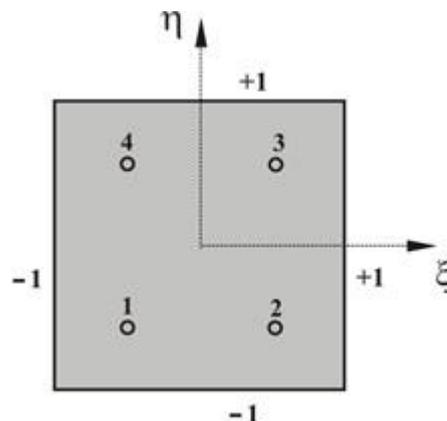
ou seja,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_j W_i G(\xi_i, \eta_j) \quad \text{Eq. 4.81}$$

Na expressão anterior, a quantidade de pontos de integração é o igual em cada direção ( $\xi$  e  $\eta$ ). Tal fato não se configura como regra. Há casos em que existe vantagem em usar números diferentes de pontos de integração em cada direção.

A Fig. 4.15 mostra a posição dos quatro pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios de terceira ordem em cada direção.

Figura 4.15 – Posição dos quatro pontos de integração para solução exata de integrais de polinômios de 3ª ordem em cada direção.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 291.

Usando a enumeração dos pontos de Gauss como mostrado na Fig. 4.15, as coordenadas destes pontos são, para  $k = 1, \dots, 4$ :

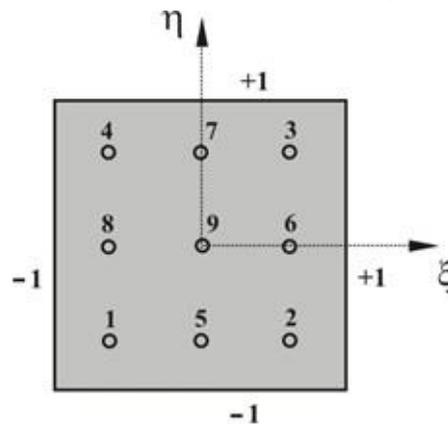
$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = \xi_3 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \eta_1 = \eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta_3 = \eta_4 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.82}$$

e os correspondentes pesos são para  $k = 1, \dots, 4$ :

$$W_1 = W_2 = W_3 = W_4 = 1 \times 1 = 1 \quad \text{Eq. 4.83}$$

A Fig. 4.16 mostra a posição dos nove pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios de quinta ordem em cada direção.

Figura 4.16 – Posição dos nove pontos de integração para a solução exata de integrais de polinômios de quinta ordem em cada direção.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 292.

As coordenadas dos pontos de Gauss, enumerados conforme Fig. 4.16, são, para  $k = 1, \dots, 9$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_4 = \xi_8 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \xi_5 = \xi_7 = \xi_9 = 0, \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_6 = \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \eta_1 = \eta_2 = \eta_5 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \eta_6 = \eta_8 = \eta_9 = 0, \quad \eta_3 = \eta_4 = \eta_7 = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.84}$$

e os correspondentes pesos para  $k = 1, \dots, 9$  são:

$$\begin{aligned}
 W_1 = W_2 = W_3 = W_4 &= \left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{25}{81} \\
 W_5 = W_6 = W_7 = W_8 &= \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{40}{81} \\
 W_9 &= \left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{64}{81}
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 4.85}$$

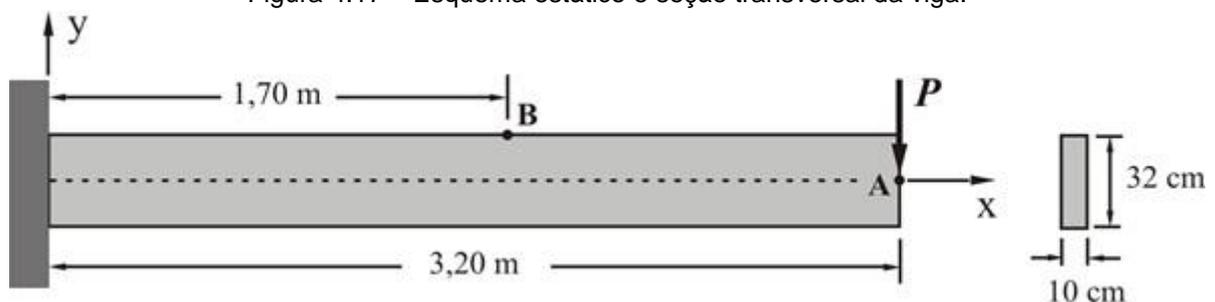
#### 4.10 Exemplo de aplicação dos conceitos:

O problema proposto consiste na determinação da deflexão  $v_A$  do ponto A e a tensão normal  $\sigma_x$  no ponto B da viga em balanço mostrada na Fig. 4.17. Lança-se mão do uso de elementos quadrilaterais de *Taig* nos seguintes casos:

- (a) uma malha de elementos com  $b = 2$  cm e  $h = 32$  cm;
- (b) uma malha de elementos com  $b = 4$  cm e  $h = 16$  cm;
- (c) uma malha de elementos com  $b = 8$  cm e  $h = 8$  cm;
- (d) uma malha de elementos com  $b = 16$  cm e  $h = 4$  cm;
- (e) uma malha de elementos com  $b = 32$  cm;  $h = 2$  cm e
- (f) uma malha de elementos com  $b = 64$  cm e  $h = 1$  cm.

Dados:  $E = 69$  GPa,  $\nu = 0.3$  e  $P = 51750$  N.

Figura 4.17 – Esquema estático e seção transversal da viga.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 297.

Solução:

O programa computacional utilizado para obter as respostas deste exemplo foi desenvolvido pelo Prof.º Dr. Wlamir Carlos de Oliveira, utilizando linguagem de

programação *Fortram*. A utilização do programa foi gentilmente cedida pelo próprio desenvolvedor.

A Tabela 2 mostra os resultados encontrados para cada discretização.

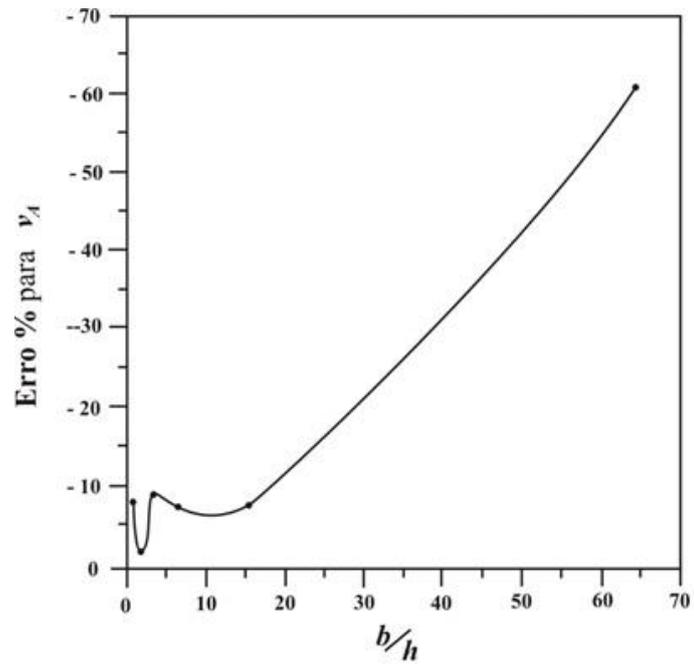
Tabela 4.2 – Resultados encontrados para cada discretização.

Caso s	$\frac{b}{h}$	Nº de Elem	Nº de nós	Nº de graus de liberdade	$v_A$ (cm)	Erro para $v_A$ (%)	$\sigma_x$ em B (MPa)	Erro para $\sigma_x$ (%)
(a)	2/32	160	322	640	-2,747	-8,43	45,1	-0,88
(b)	1/4	160	243	480	-2,925	-2,50	46,3	+1,76
(c)	1	160	205	400	-2,926	-2,47	44,6	-1,98
(d)	4	160	189	360	-2,743	-8,57	42,6	-6,37
(e)	16	160	187	340	-2,169	-7,70	31,6	-30,55
(f)	64	160	198	330	-1,183	-60,57	19,3	-57,58
<b>Solução analítica <math>\Rightarrow</math></b>					<b>-3,000</b>		<b>45,5</b>	

Os erros percentuais foram obtidos realizando-se a comparação entre os resultados obtidos por solução numérica e o resultado obtidos pela solução analítica do problema ( $v_A = -3,000$  cm e  $\sigma_x = 45,5$  MPa).

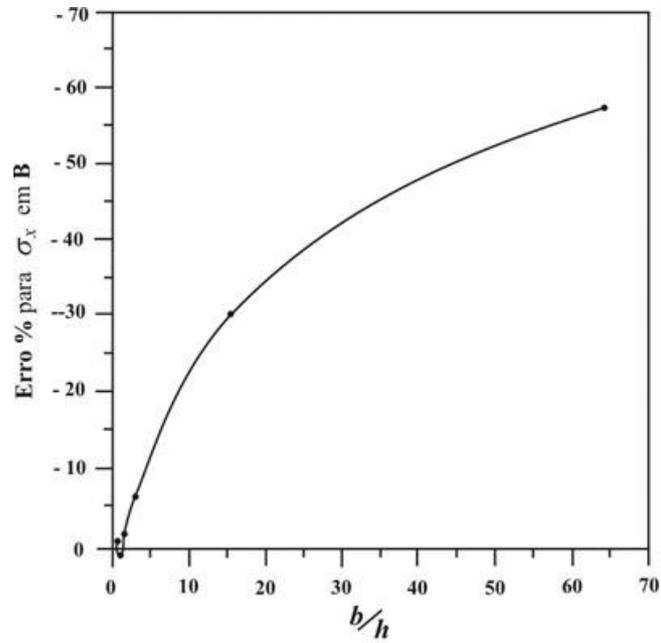
O Gráfico 4.1 mostra a curva dos erros percentuais para a deflexão  $v_A$  do ponto A da viga enquanto que a curva dos erros percentuais para a tensão normal  $\sigma_x$  no ponto B da viga é mostrada no Gráfico 4.2.

Gráfico 4.1 – Erros percentuais para a deflexão na viga.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 298.

Gráfico 4.2 – Erros percentuais para as tensões normais atuantes na viga.



Fonte: OLIVEIRA (2013), p. 298.

## 5 METODOLOGIA

### 5.1 Requisitos para o desenvolvimento do trabalho

Como trata-se de uma investigação conceitual, sem execução de experimentos laboratoriais ou de observação de estruturas reais, o desenvolvimento deste trabalho baseia-se na apuração de dados extraídos de bibliografias clássicas, consolidando o referencial teórico para discussão dos resultados obtidos através de cálculos por processos distintos.

### 5.2 Procedimentos metodológicos

Inicialmente propôs-se o estudo do Método dos Elementos Finitos, buscando compreender os conceitos introdutórios à este tema, visto que é uma disciplina lecionada, de maneira geral, em cursos de pós-graduação. Desse modo, buscou-se conhecer os princípios elementares e conceitos para aplicação desse método, não aprofundando-se demasiadamente na compreensão dos conceitos mais complexos.

O problema proposto foi a análise de tensões em uma viga carregada perpendicularmente ao seu eixo com uma carga concentrada. Durante os estudos, foi adotado um tipo de modelagem matemática que seria utilizada para contorno do problema proposto. Definiu-se a utilização da formulação isoparamétrica com elementos finitos planos quadrilaterais quadráticos da família *Serendipity*.

Posteriormente, estudos sobre a determinação de tensões para esse modelo através da Teoria da Elasticidade e da Resistência dos Materiais foram realizados.

Do mesmo modo que no estudo do Método dos Elementos Finitos, o estudo da Teoria da Elasticidade, que também se difunde com ênfase em cursos de pós-graduação, se deu de maneira simplificada e restrita ao objetivo do trabalho, ou seja, calcular as tensões próximas ao ponto de aplicação de cargas, baseando-se principalmente nos resultados obtidos por Seewald, conforme exposto em TIMOSHENKO (1980).

A última etapa do embasamento teórico consiste na revisão dos conceitos de tensão na flexão abordados na Resistência dos Materiais, disciplina esta que se configura como uma das mais essenciais na graduação em Engenharia Civil. Tal revisão se deu com base na literatura clássica difundida internacionalmente, como HIBBELER (2010) e também BEER (1995).

Contendo o embasamento mínimo necessário, procedeu-se a coleta de dados e análise dos resultados. Os resultados das tensões utilizando as equações da Resistência dos Materiais foram obtidos através de cálculo manual, ponto a ponto, conforme necessário para levantamento das curvas características da distribuição de tensões. Os resultados obtidos através da Teoria da Elasticidade também foram calculados manualmente, a partir das tensões obtidas pela Resistência dos Materiais, acrescentando uma parcela de tensão obtida com auxílio dos gráficos fornecidos por TIMOSHENKO (1980) e expostos no capítulo 3 deste trabalho.

Contudo, os resultados obtidos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos foram obtidos de maneira distinta das anteriores. Foi utilizado um código computacional não comercial elaborado em linguagem de programação *FORTRAN* desenvolvido e fornecido pelo Prof.<sup>o</sup> Dr. Wlamir Carlos de Oliveira, código este adaptado com a implementação do elemento plano quadrilateral quadrático isoparamétrico da família *Serendipity* de modo a executar um teste com este tipo de elemento para cálculo de tensões em vigas.

Considera-se objeto de estudo deste trabalho uma viga que possui comprimento de 4,5 m e seção transversal retangular com 0,10 m de base e 0,40 m de altura, submetida a uma carga concentrada no ponto médio do banzo superior, com direção vertical e sentido para baixo e intensidade de 60 kN. O módulo de elasticidade longitudinal adotado para a viga é de 210 GPa e o Coeficiente de *Poisson* é de 0,3. A discretização da viga para o cálculo das tensões pelo Método dos Elementos Finitos consiste na divisão em 91 partes na horizontal e 8 partes na vertical, totalizando 728 elementos do tipo isoparamétrico quadrilateral quadrático plano da família *Serendipity* com 8 pontos nodais.

Com os resultados das tensões obtidos pelos três métodos empregados neste estudo foram construídos gráficos para expressar tais valores, com relação às superfícies  $y = +c$ ,  $y = +0,5c$ ,  $y = 0c$ ,  $y = -0,5c$  e  $y = -c$ , para as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ . As

superfícies aqui citadas serão demonstradas posteriormente na Fig. 6.1 As tensões  $\sigma_y$  não foram abordadas neste trabalho.

### 5.3 Ferramentas utilizadas

As ferramentas essenciais utilizadas foram os livros e publicações pertinentes ao tema. Além disso, como citado acima, foi utilizado um programa computacional baseado em linguagem *FORTRAN* específico para obtenção de tensões via Método dos Elementos Finitos. Com a utilização dessa ferramenta e desse método para obtenção de dados consegue-se calcular com clareza as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$ .

Durante o estudo teórico sobre o Método dos Elementos Finitos, também foi utilizado um *software* específico para a resolução de problemas matemáticos denominado *DERIVE*. Tal ferramenta foi de grande valia durante o desenvolvimento de operações com elementos finitos sem auxílio de programa automatizado. O uso do *DERIVE* se deu na resolução de derivadas e integrais de certa complexidade, bem como nas operações com matrizes e vetores, principalmente na inversão de matrizes de grande ordem, cálculo este que se torna inviável de ser desenvolvido manualmente.

Para compilação dos dados obtidos e levantamento das curvas características foi utilizado o *software Excel*<sup>®</sup>, versão 2013, da *Microsoft*<sup>®</sup>, obtendo gráficos simplificados que buscam retratar as distribuições de tensões nas superfícies da viga.

Na elaboração das figuras foi utilizada a ferramenta *InkScape*, *software* livre para desenhos vetorizados.

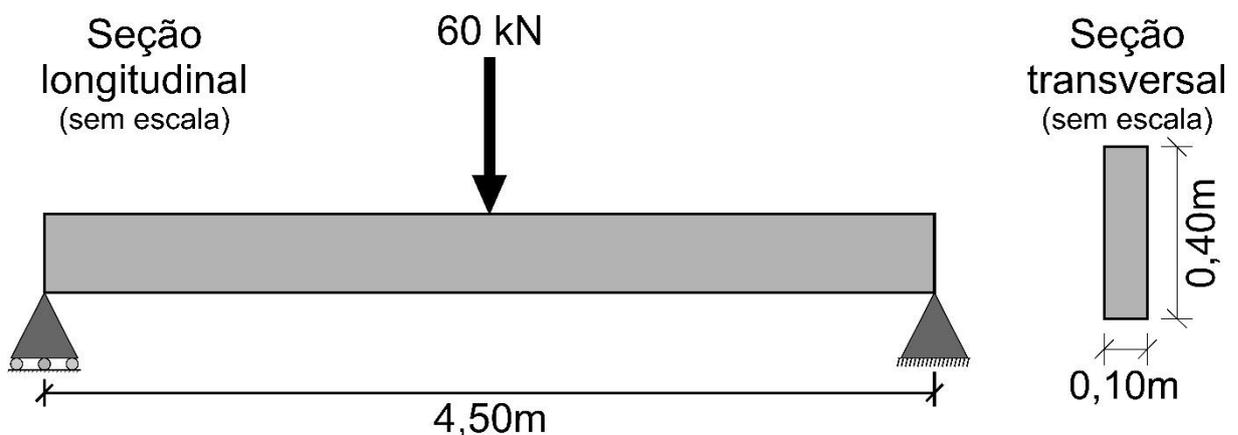
## 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nos gráficos abaixo estão representados os resultados obtidos para as tensões em superfícies distintas de uma viga com 4,50 m de comprimento, simplesmente apoiada em seus dois pontos extremos, com seção transversal retangular de 0,10 m de base e 0,40 m de altura, carregada perpendicularmente no ponto médio do banzo superior com uma força pontual de 60 kN.

Os gráficos foram construídos com base nos resultados determinados utilizando os três métodos estudados neste trabalho. Foram calculadas as tensões  $\sigma_x$  e  $\tau_{xy}$  em pontos que distam horizontalmente  $3c$  do ponto de aplicação da carga pontual, ou seja, 60 cm à esquerda e 60 cm à direita da força concentrada. Os gráficos foram construídos com base nas tensões encontradas para cinco superfícies distintas para  $\sigma_x$  e três seções distintas para  $\tau_{xy}$ . Com relação às tensões normais, as superfícies analisadas situam-se em valores de  $y$  iguais a  $+c$ ,  $+0,5c$ ,  $0c$ ,  $-0,5c$  e  $-c$ , sendo  $c$  igual a metade da altura da viga, ou seja, 20 cm. Aqui, o eixo  $y$  tem sentido positivo para baixo. Com relação às tensões de cisalhamento, as superfícies analisadas situam-se em valores de  $y$  iguais a  $+0,5c$ ,  $0c$  e  $-0,5c$ .

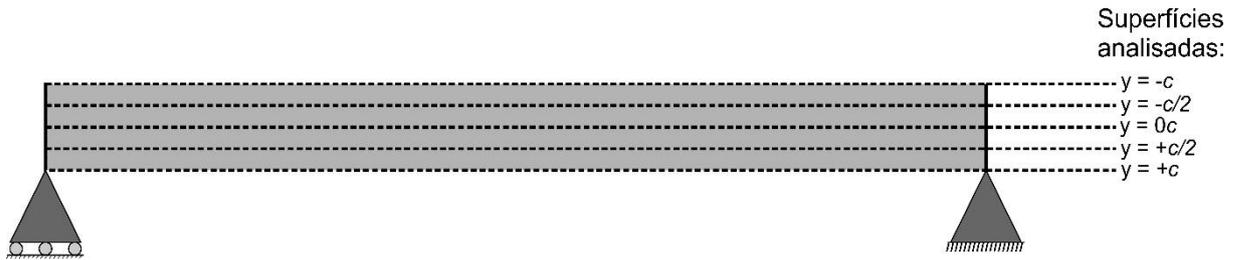
As Figs. 6.1 e 6.2 demonstram a viga analisada neste trabalho, bem como as superfícies em que foram calculadas as tensões.

Figura 6.1 – Esquema estático e seção transversal da viga.



Fonte: Elaborada pelo autor.

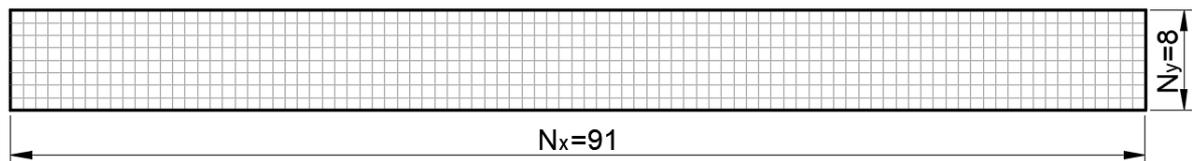
Figura 6.2 – Superfícies da viga cujas tensões serão calculadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já a Fig. 6.3 demonstra a discretização da viga para o cálculo através do Método dos Elementos Finitos. Nessa figura,  $N_x$  e  $N_y$  representam o número de subdivisões na direção  $x$  e na direção  $y$ , respectivamente, totalizando 728 elementos.

Figura 6.3 – Discretização da viga em elementos finitos.



Total de elementos =  $N_x \cdot N_y = 728$

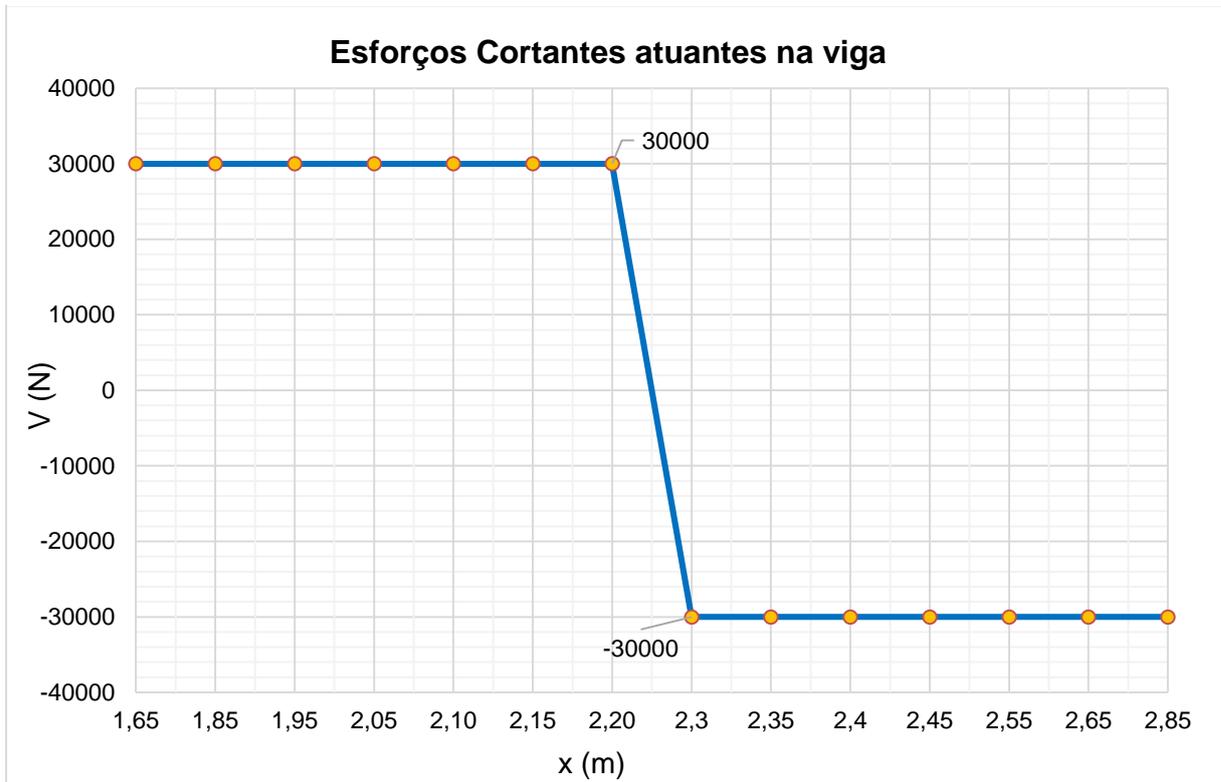
Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir deste ponto serão expostos os gráficos com os resultados das tensões obtidas pelos três métodos de cálculo de tensões aplicados. Inicialmente, são mostrados os valores obtidos para as tensões de cisalhamento e, posteriormente, para as tensões normais.

Para cada superfície da viga em que foram realizados os cálculos, expõe-se, sequencialmente, as tensões obtidas pelas equações da Resistência dos Materiais, pela Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos, seguidos de gráficos comparativos entre os resultados da Teoria da Elasticidade e da Resistência dos Materiais e entre a Teoria da Elasticidade e o Método dos Elementos Finitos. Os gráficos contendo comparações entre métodos distintos mostram as variações percentuais entre os mesmos.

As unidades de medida, nos gráficos, estão conforme o Sistema Internacional de Unidades.

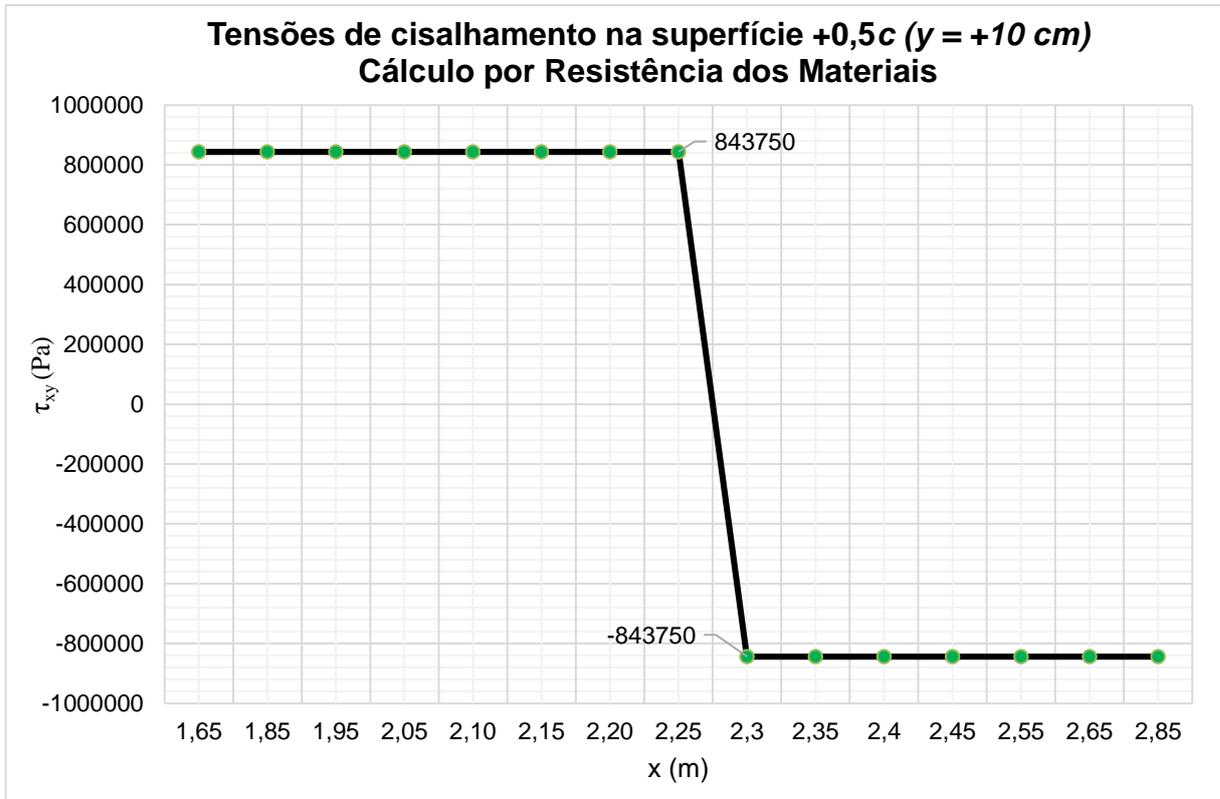
Gráfico 6.1 – Diagrama de esforços cortantes atuantes na viga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

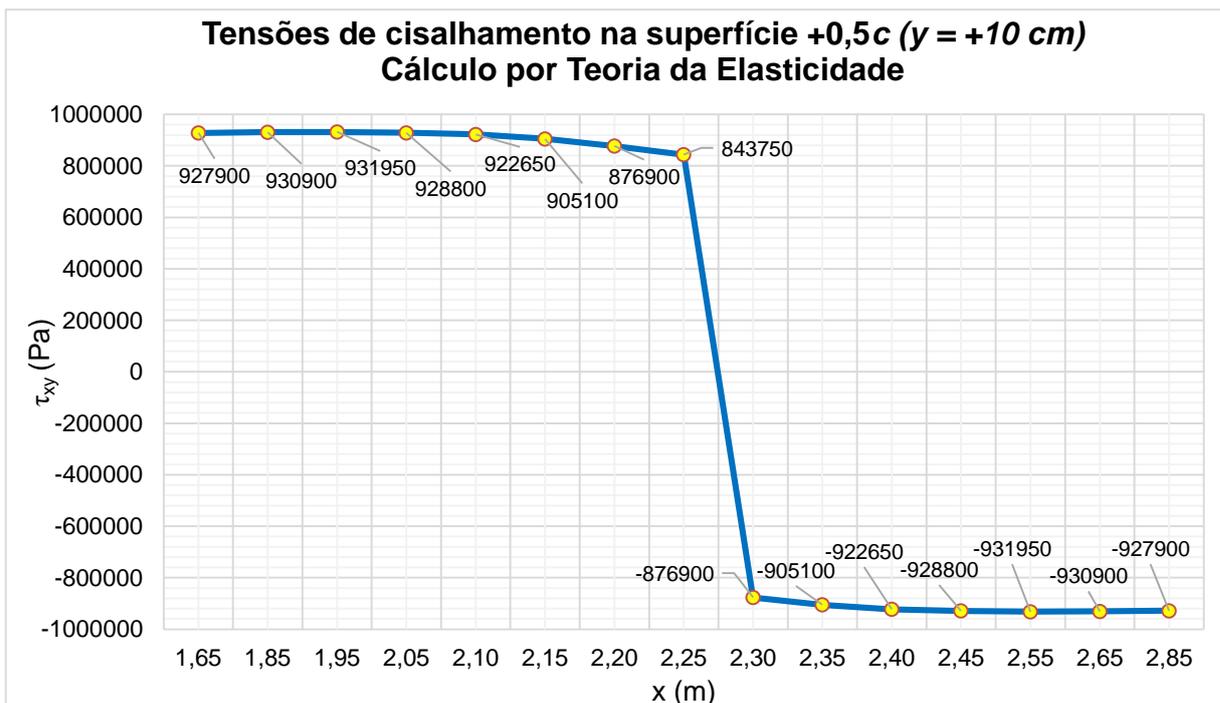
Observa-se no gráfico exposto acima que, no ponto central da viga há uma abrupta descontinuidade nos valores para esforços cortantes. É importante frisar que, para simplificação da representação, o ponto médio ( $x = 2,25$  m) não é demonstrado, visto que exatamente neste ponto o esforço cortante varia de 30 kN para -30 kN, o que resultaria em uma linha vertical sobre esta abscissa.

Gráfico 6.2 – Tensões de cisalhamento calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície +0,5c (y = +10 cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

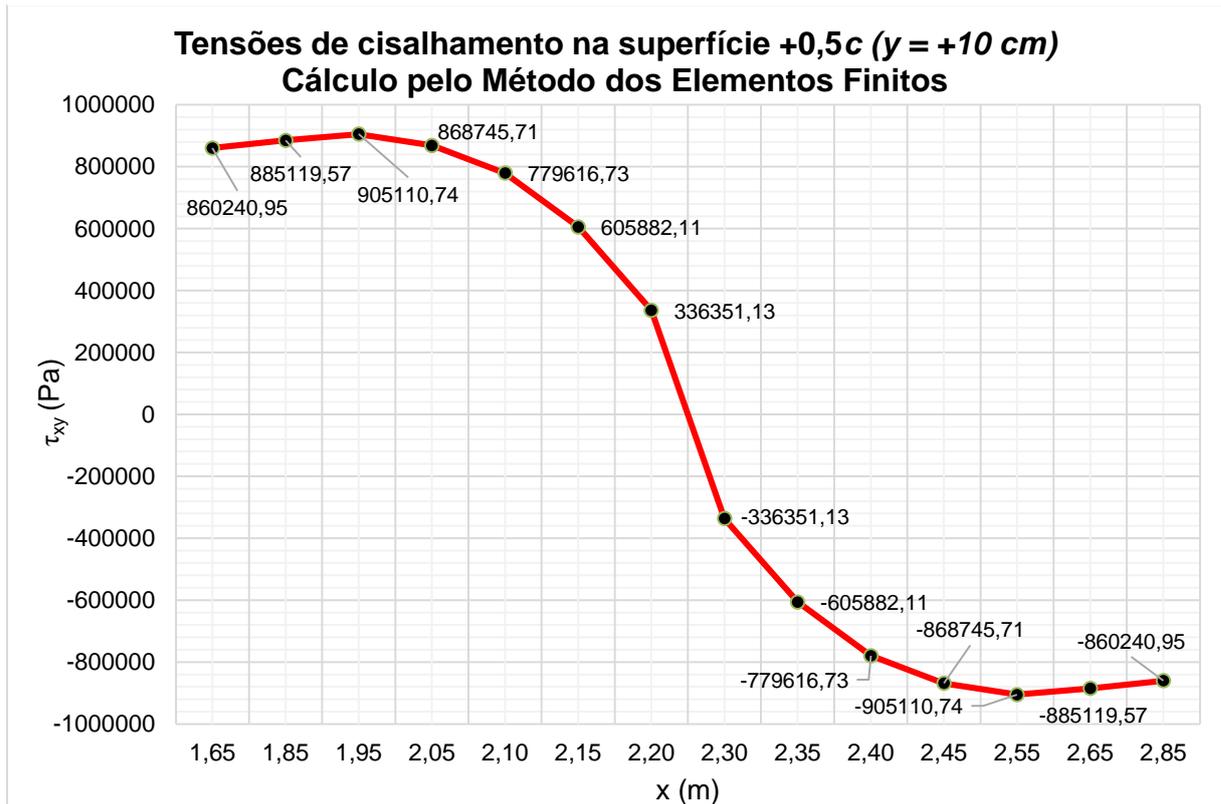
Gráfico 6.3 – Tensões de cisalhamento calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície +0,5c (y = +10 cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se nos gráficos 6.2 e 6.3 que, apesar dos valores absolutos serem distintos, o comportamento da curva de distribuição de tensão na superfície  $+0,5c$  é deveras parecido para os dois métodos de cálculo, apresentando variação abrupta na região da seção transversal média.

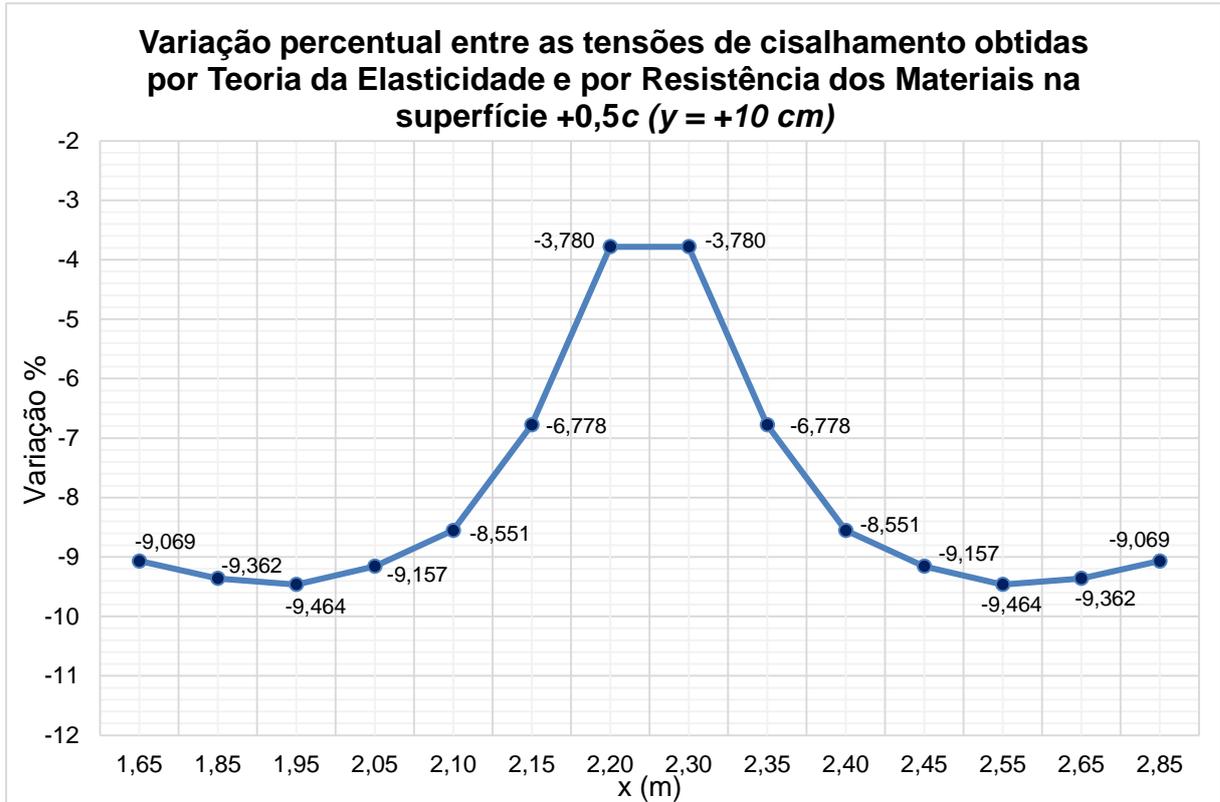
Gráfico 6.4 – Tensões de cisalhamento calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície  $+0,5c$  ( $y = +10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

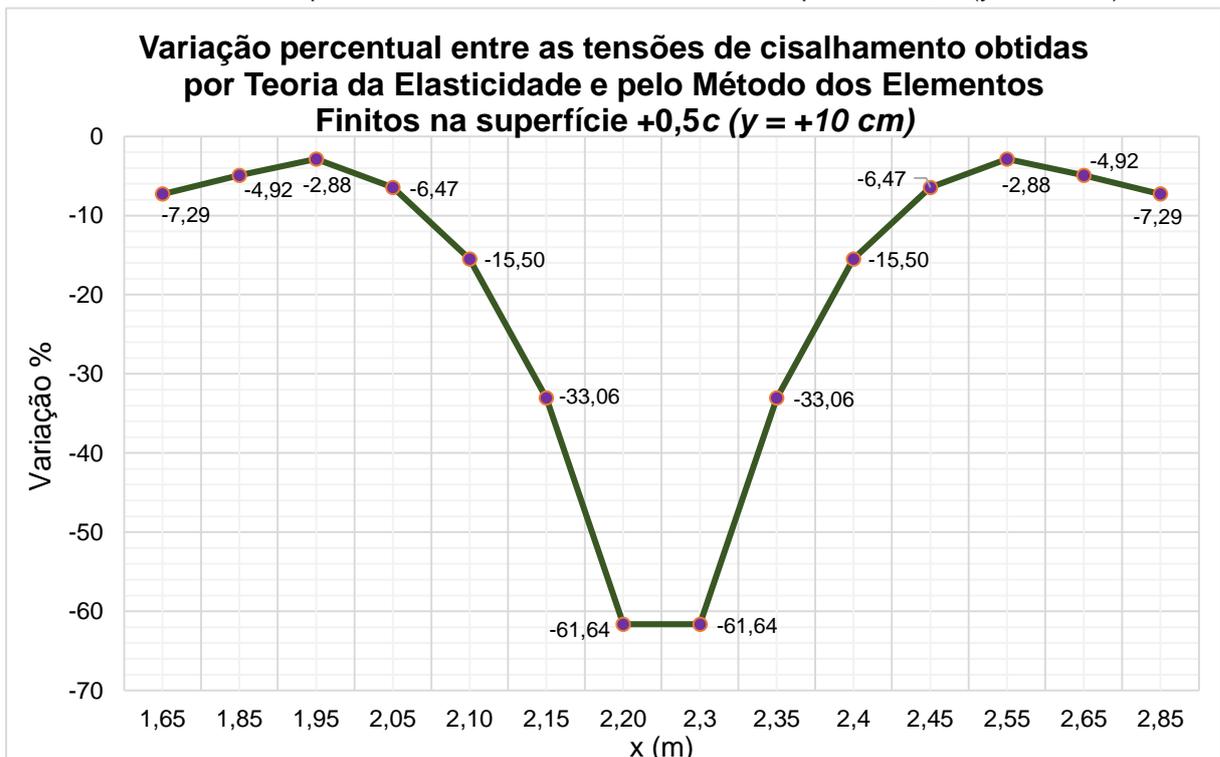
Vê-se que a curva de distribuição de tensões pelo Método dos Elementos Finitos destoa dos outros métodos, apresentando uma variação menos incisiva na seção transversal média.

Gráfico 6.5 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície +0,5c (y = +10 cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.6 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +0,5c (y = +10 cm).

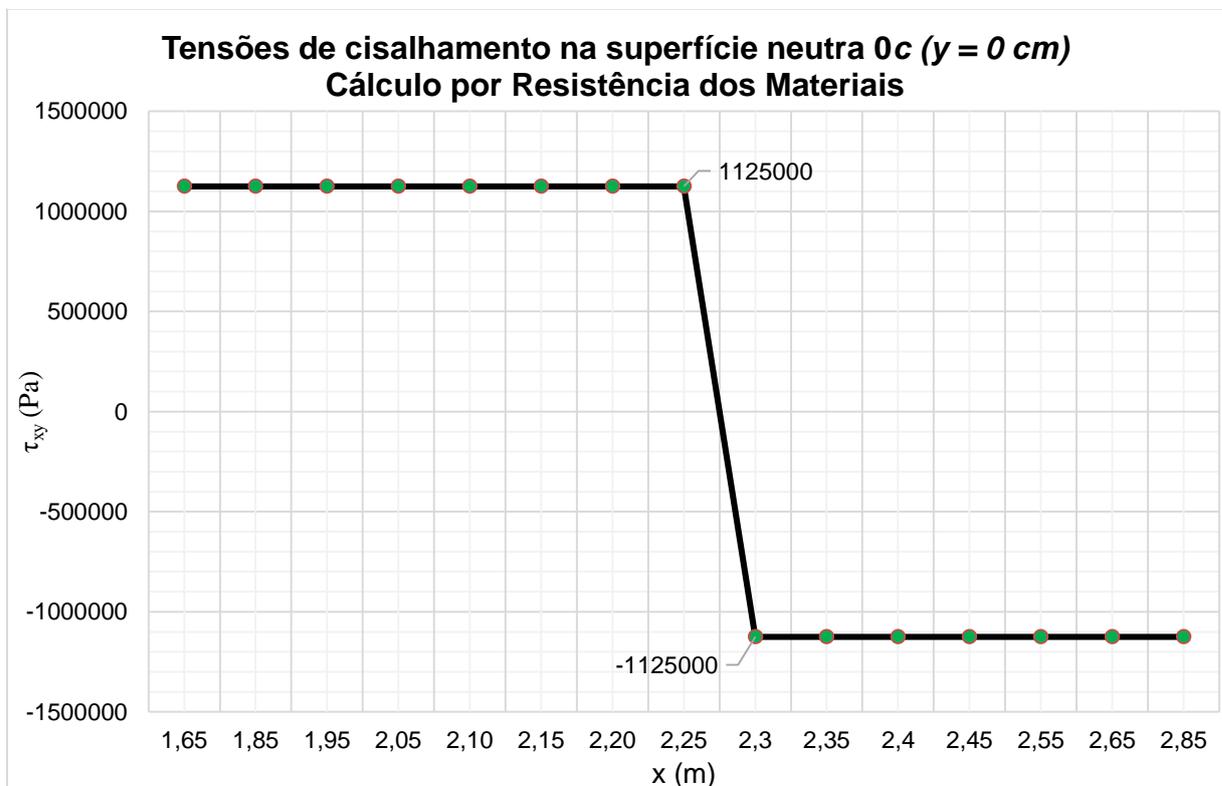


Fonte: Elaborado pelo autor.

Vale pontuar aqui, com relação aos gráficos expostos até este ponto e analisando os gráficos 6.5 e 6.6, que as tensões de cisalhamento encontradas pela teoria clássica de viga (Resistência dos Materiais) para uma superfície da viga situada 10 cm abaixo da linha neutra, diferem, com relação aos valores obtidos pela Teoria da Elasticidade, com base em TIMOSHENKO (1980), em até -9,464%. Isso demonstra que os resultados obtidos por Resistência dos Materiais são relativamente menores. Entretanto, ao aproximar-se do ponto de aplicação da carga, essa variação diminui para -3,78%.

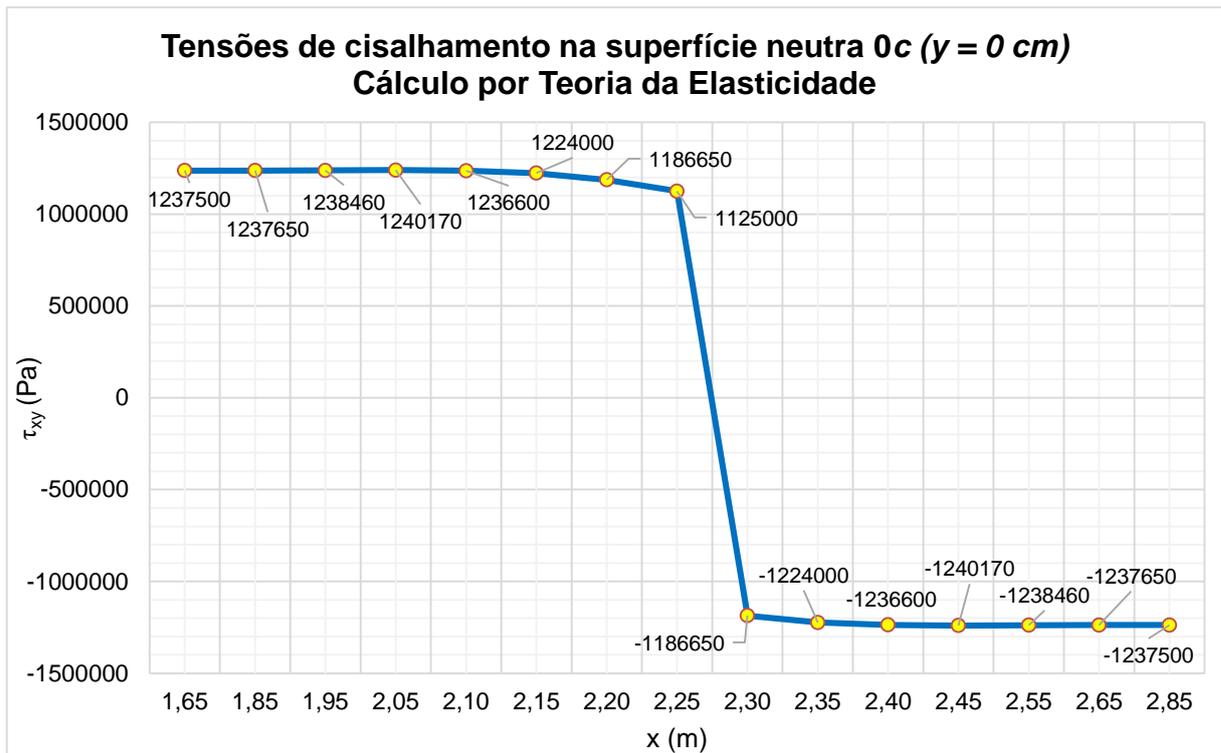
Contudo, ao se analisar a variação percentual do Método dos Elementos Finitos, percebe-se uma grande discrepância, chegando a -61,64%, evidenciando valores obtidos por esse método muito menores que os valores da Teoria da Elasticidade. Cabe ponderar que essa variação acentuada ocorre próxima ao ponto de aplicação da carga, sendo que em pontos mais distantes, essa variação é minimizada, chegando a -2,88%.

Gráfico 6.7 – Tensões de cisalhamento calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície 0c ( $y = 0$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.8 – Tensões de cisalhamento calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície 0c ( $y = 0$  cm).

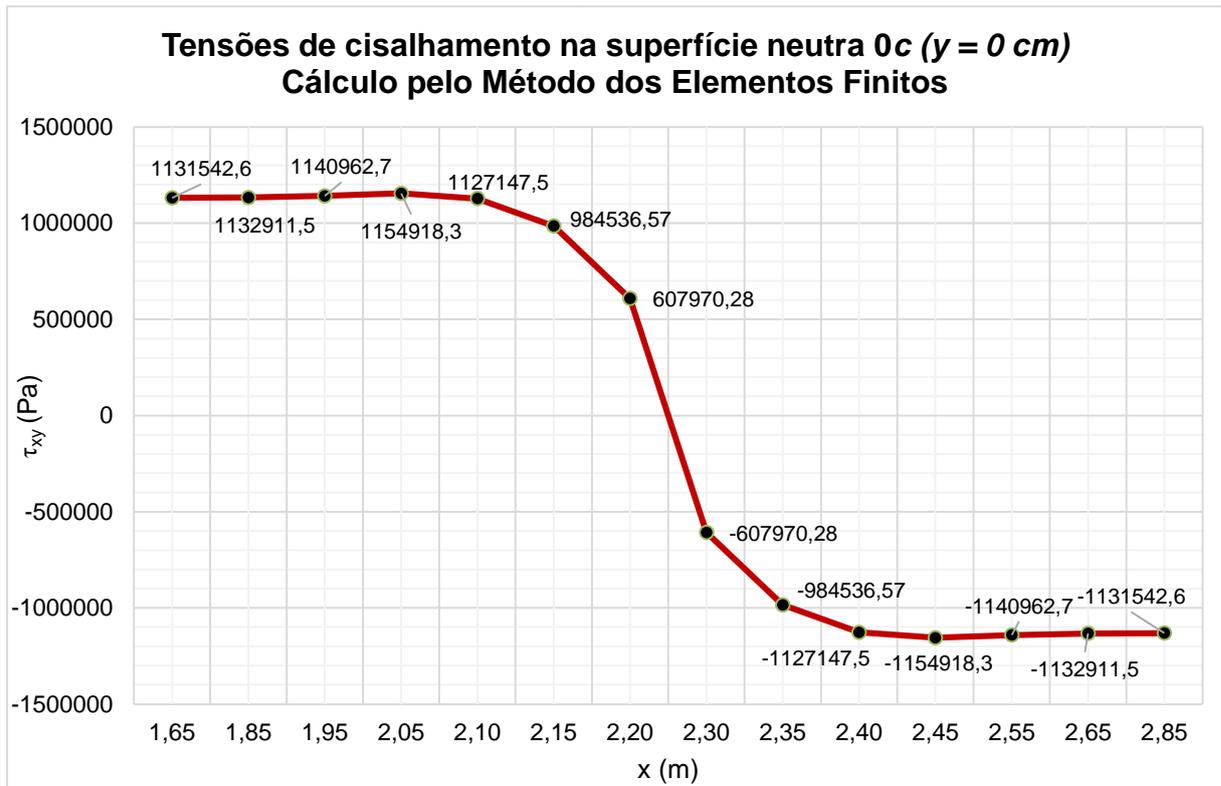


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos 6.7 e 6.8 descrevem os valores de tensões de cisalhamento na superfície horizontal que passa pelo centroide da seção transversal. Essa seção apresenta os maiores valores para tensões de cisalhamento, de acordo com a teoria clássica da Resistência dos Materiais, para vigas constituídas de um único material homogêneo e isotrópico. Vê-se que o mesmo ocorre para os valores obtidos pela Teoria da Elasticidade, nesse caso. Também vale destacar, novamente, o comportamento similar entre os dois métodos de cálculo na curva de distribuição de tensões ao longo da superfície analisada.

É notável também a descontinuidade abrupta na seção média, oriunda da variação de esforço cortante nessa região da viga.

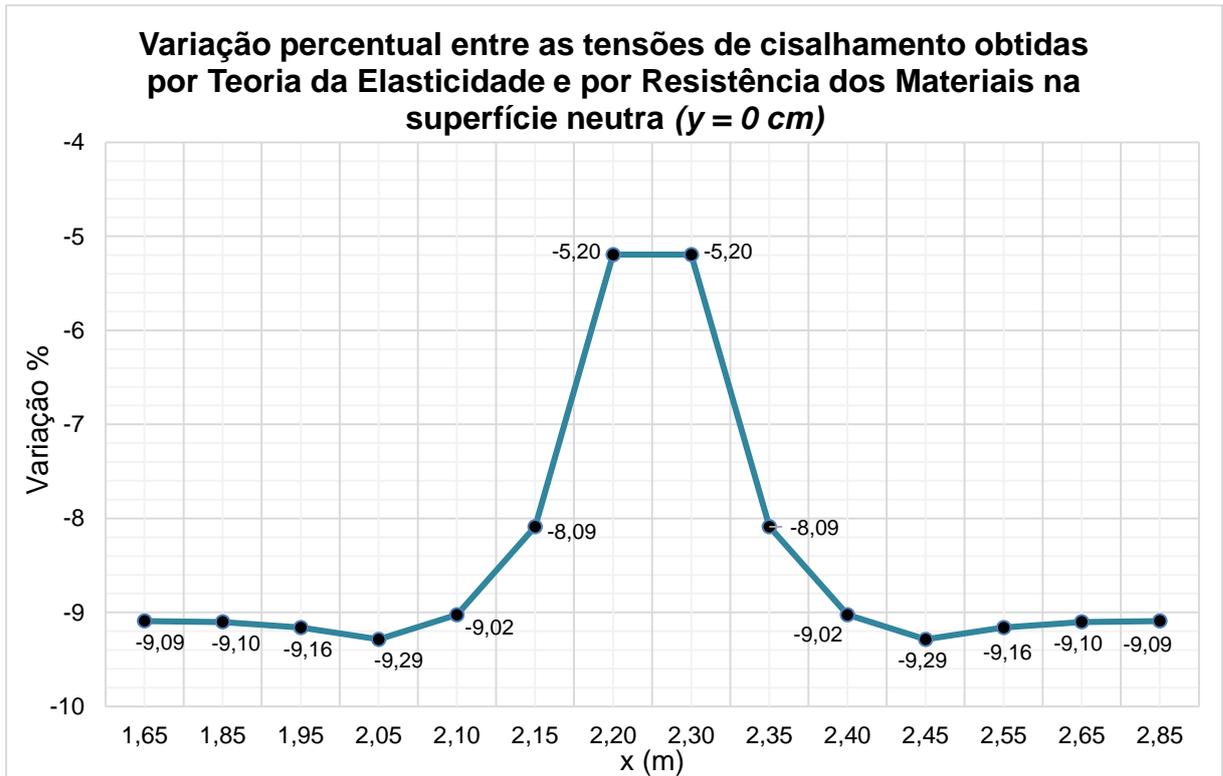
Gráfico 6.9 – Tensões de cisalhamento calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície  $0c$  ( $y = 0$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

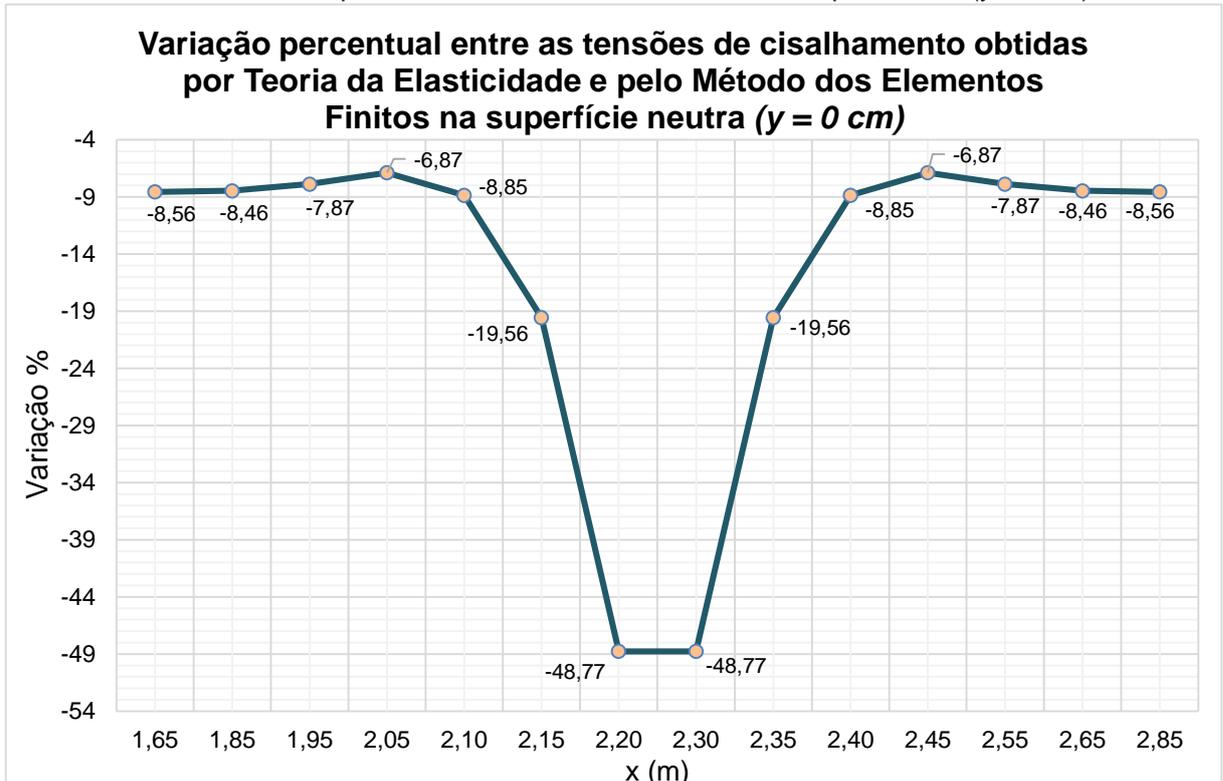
Pode-se visualizar no Gráfico 6.9 que a curva de distribuição de tensões pelo Método dos Elementos Finitos tem características distintas quanto às variações nos valores das tensões obtidas, mas ainda assim, apresentando descontinuidade na seção média.

Gráfico 6.10 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície 0c ( $y = 0\text{cm}$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.11 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície 0 c ( $y = 0\text{ cm}$ ).

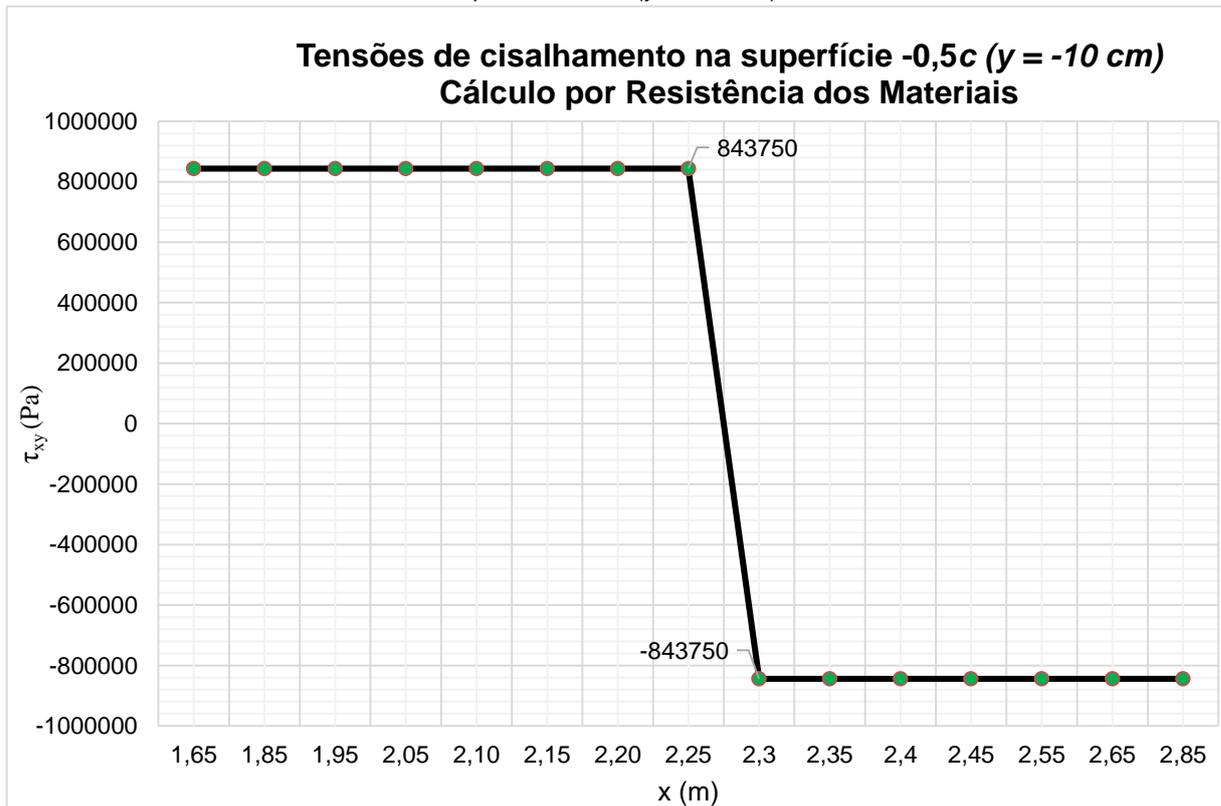


Fonte: Elaborado pelo autor.

Com relação aos gráficos expostos sobre a superfície neutra da viga, vê-se que as tensões de cisalhamento encontradas pela teoria clássica de viga diferem, com relação aos valores obtidos pela Teoria da Elasticidade, com base em TIMOSHENKO (1980), em até -9,29%. Todavia, ao aproximar-se do ponto de aplicação da carga, essa variação diminui para -5,20%.

Já na análise da variação percentual do Método dos Elementos Finitos, percebe-se novamente uma grande discrepância, chegando a -48,77%, menor que na superfície  $+0,5c$ , mas ainda assim de grande magnitude. Cabe ponderar que essa variação acentuada ocorre próxima ao ponto de aplicação da carga, sendo que em pontos mais distantes, essa variação é minimizada, chegando a -6,87%.

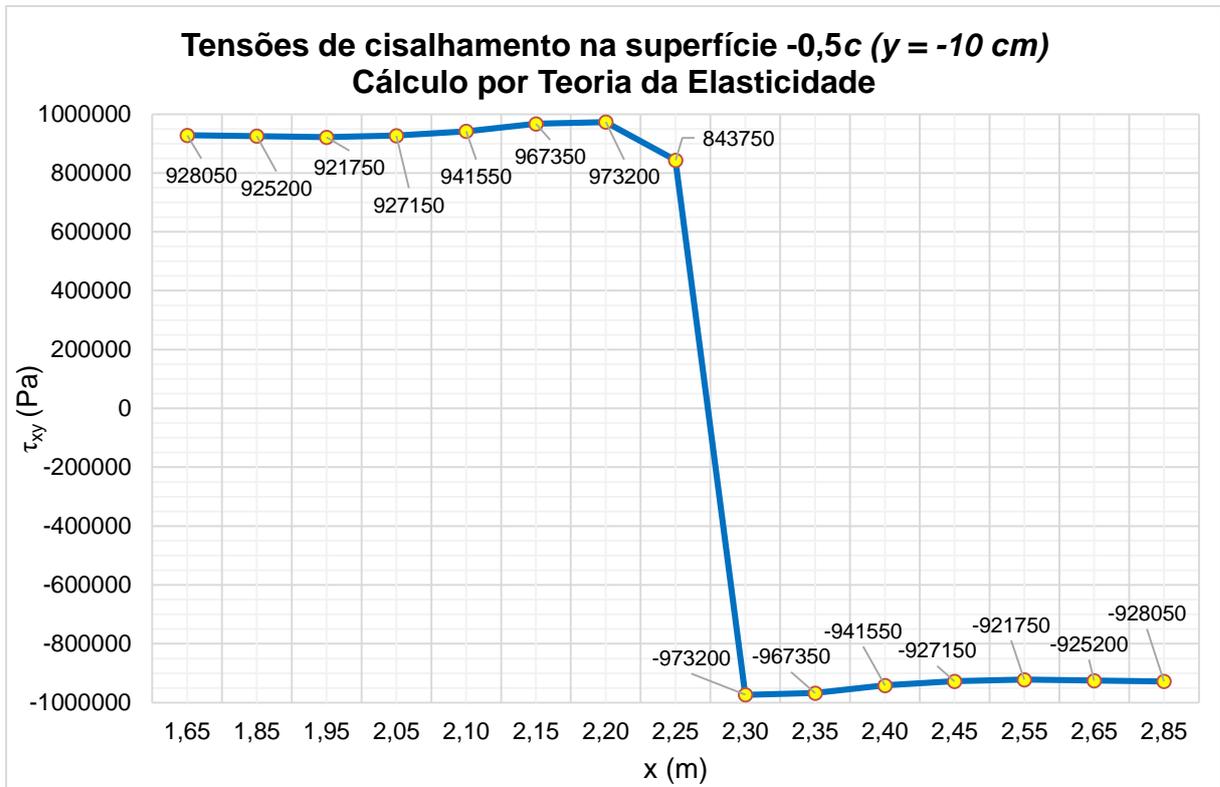
Gráfico 6.12 – Tensões de cisalhamento calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície  $-0,5c$  ( $y = -10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico 6.12 apresenta valores idênticos aos obtidos para a seção situada na superfície  $+0,5c$ , expostos no gráfico 6.2. Tal fato se deve aos conceitos físicos admitidos na formulação das equações da Resistência dos Materiais, levando a uma distribuição uniforme de tensões nas metades superior e inferior da seção transversal da viga.

Gráfico 6.13 – Tensões de cisalhamento calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície  $-0,5c$  ( $y = -10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

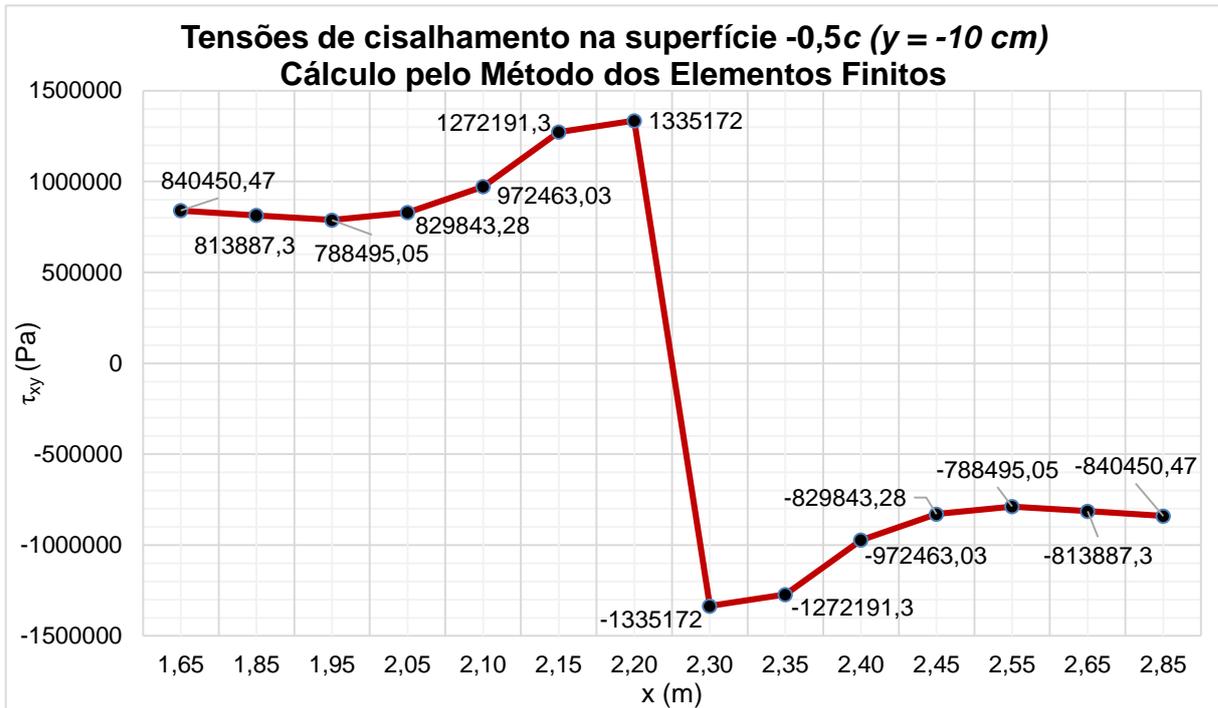
Ao contrário da semelhança exata verificada entre os gráficos 6.2 e 6.12, vê-se que os valores das tensões obtidas pela Teoria da Elasticidade nas superfícies situadas em  $-0,5c$  e  $+0,5c$  não são uniformes, como se pode notar nos gráficos 6.3 e 6.13.

Vale lembrar que os cálculos efetuados pela Resistência dos Materiais não levam em consideração os efeitos de perturbação de tensões em regiões da viga situadas próximas ao ponto de aplicação de cargas concentradas, sendo que pelo Princípio de Saint-Venant, citado no capítulo 2 deste trabalho, as tensões tendem a se distribuir uniformemente a partir de uma determinada distância do ponto de aplicação da força.

Como no gráfico 6.13 a superfície analisada situa-se mais próxima do ponto de aplicação da carga, nota-se valores maiores para as tensões de cisalhamento nessa superfície do que na superfície exposta no gráfico 6.3.

Há uma descontinuidade abrupta na distribuição de tensões na seção transversal média da viga.

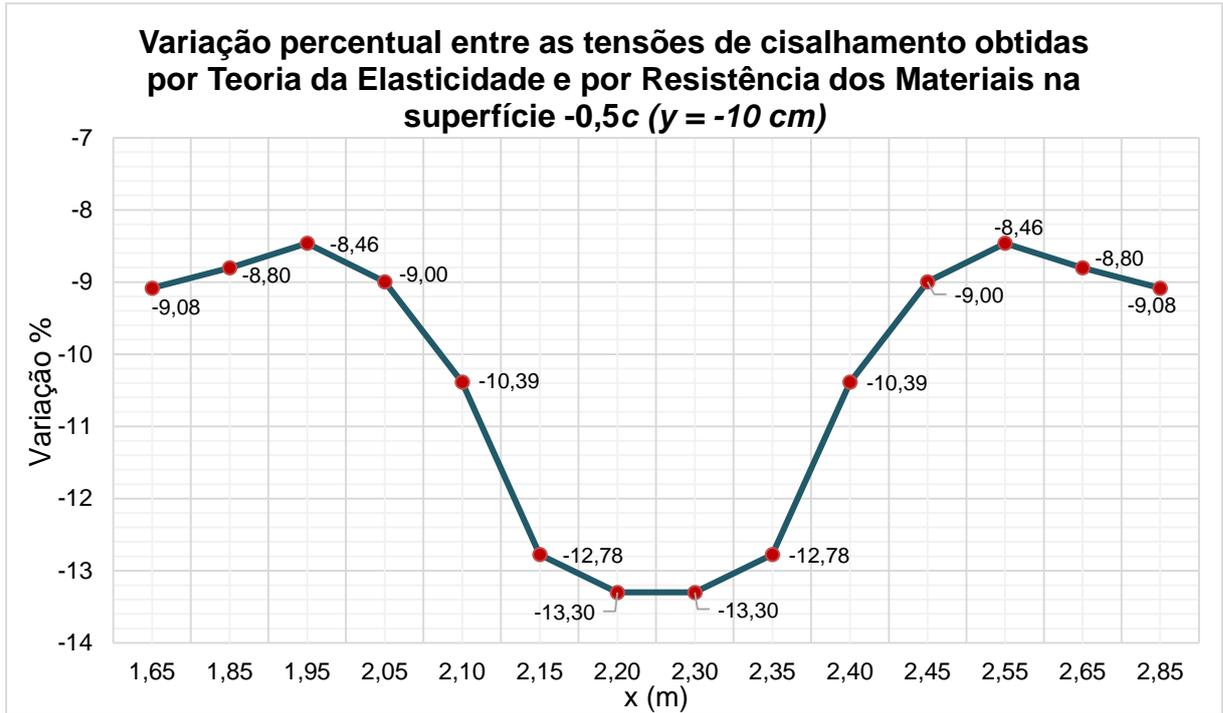
Gráfico 6.14 – Tensões de cisalhamento calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície  $-0,5c$  ( $y = -10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

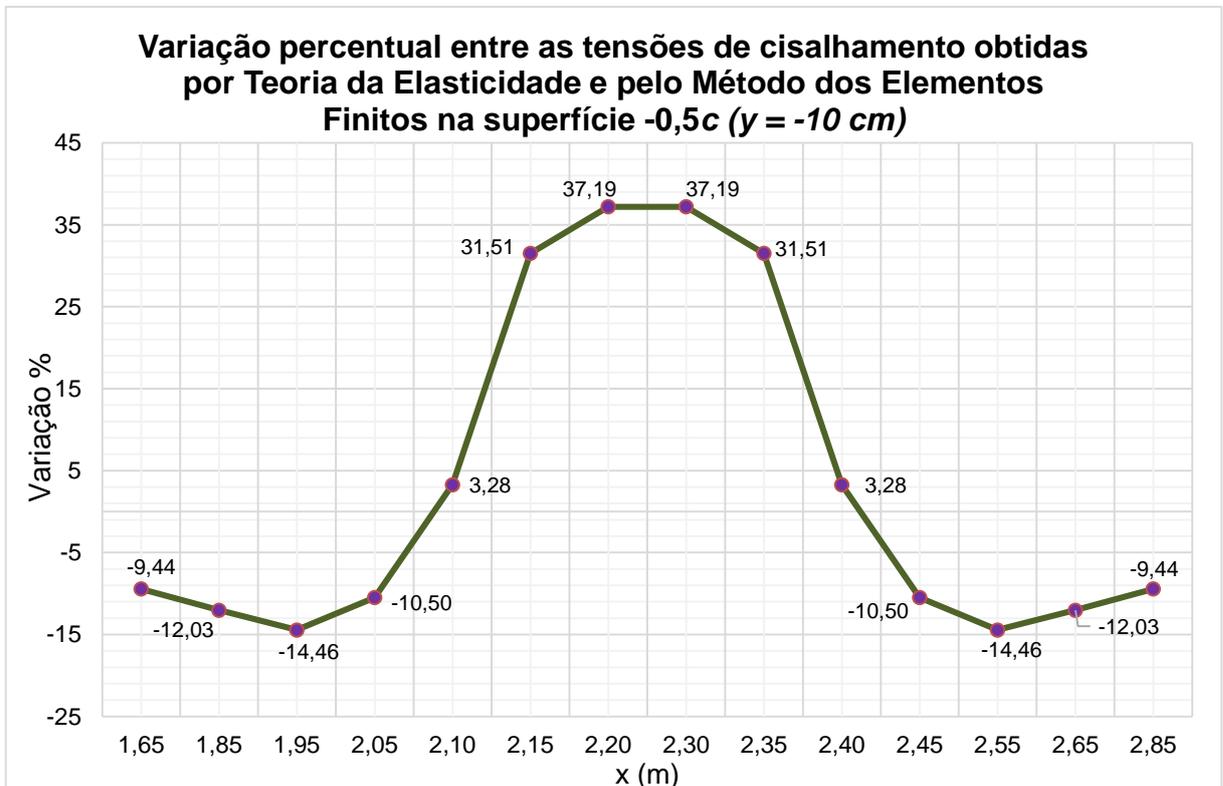
O gráfico 6.14 evidencia a obtenção de valores maiores de tensões de cisalhamento em comparação aos demais métodos, principalmente nas proximidades da seção transversal média. Contudo, vê-se, nesse caso, que o comportamento característico da curva de distribuição de tensões de cisalhamento aproxima-se do obtido pela Teoria da Elasticidade.

Gráfico 6.15 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície -0,5c (y = -10cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.16 – Variação percentual entre os resultados de tensões de cisalhamento obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -0,5c (y = -10 cm).

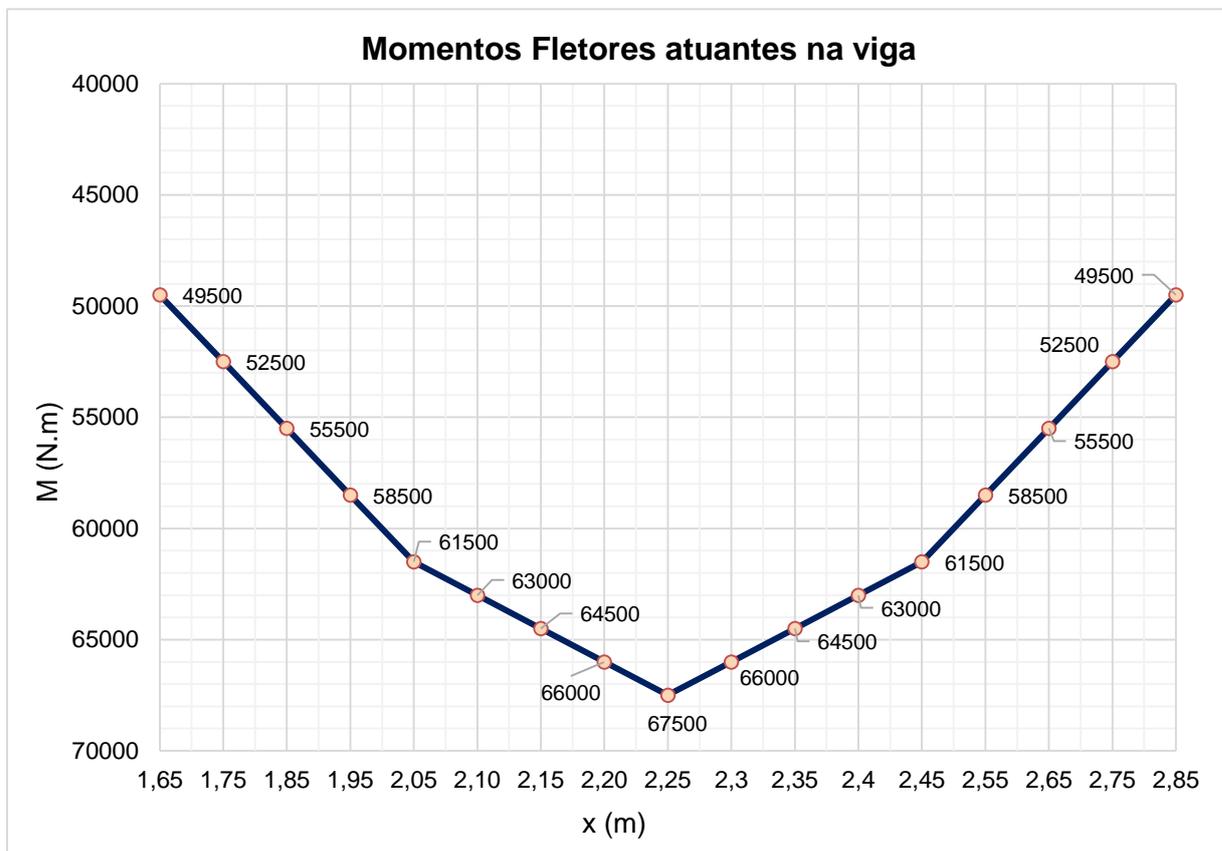


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos da superfície  $-0,5c$  demonstram que as tensões de cisalhamento encontradas pela teoria da Resistência dos Materiais diferem, com relação aos valores obtidos pela Teoria da Elasticidade, com base em TIMOSHENKO (1980), em até  $-13,3\%$ . Importante notar que, diferentemente das outras duas superfícies analisadas ( $+0,5c$  e  $0c$ ), na seção  $-0,5c$ , a maior variação ocorre justamente nos pontos mais próximos da seção transversal média, a qual se encontra imediatamente abaixo da carga pontual. Vê-se que as tensões obtidas por Resistência dos Materiais são menores que as encontradas pela Teoria da Elasticidade.

Com relação às variações entre a Teoria da Elasticidade e o Método dos Elementos Finitos, nota-se outra situação que difere das demais superfícies analisadas, já que neste caso as tensões obtidas pelo Método dos Elementos Finitos chega a valores  $37,19\%$  maiores que as obtidas por Teoria da Elasticidade. Esses dados levam a conclusão de que as tensões de cisalhamento obtidas pelo Método dos Elementos Finitos se tornam maiores quanto mais próximo da carga for o ponto analisado, tanto horizontalmente quanto verticalmente.

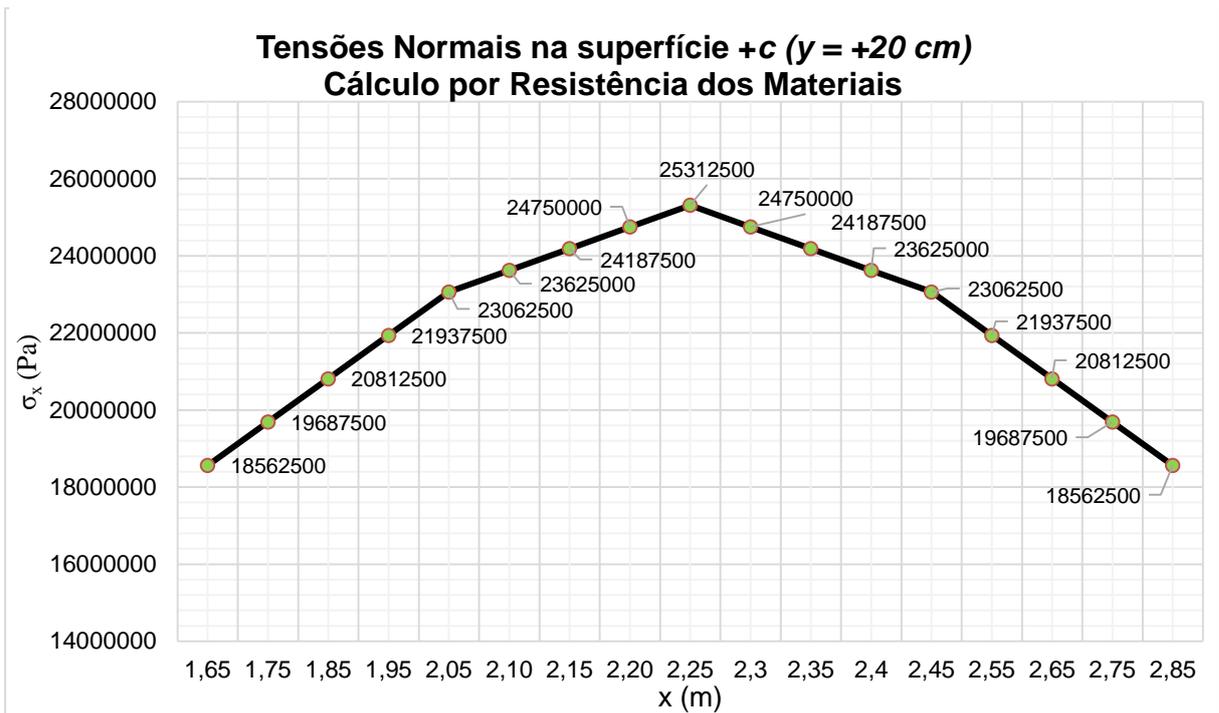
Gráfico 6.17 – Diagrama de momentos fletores atuantes na viga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

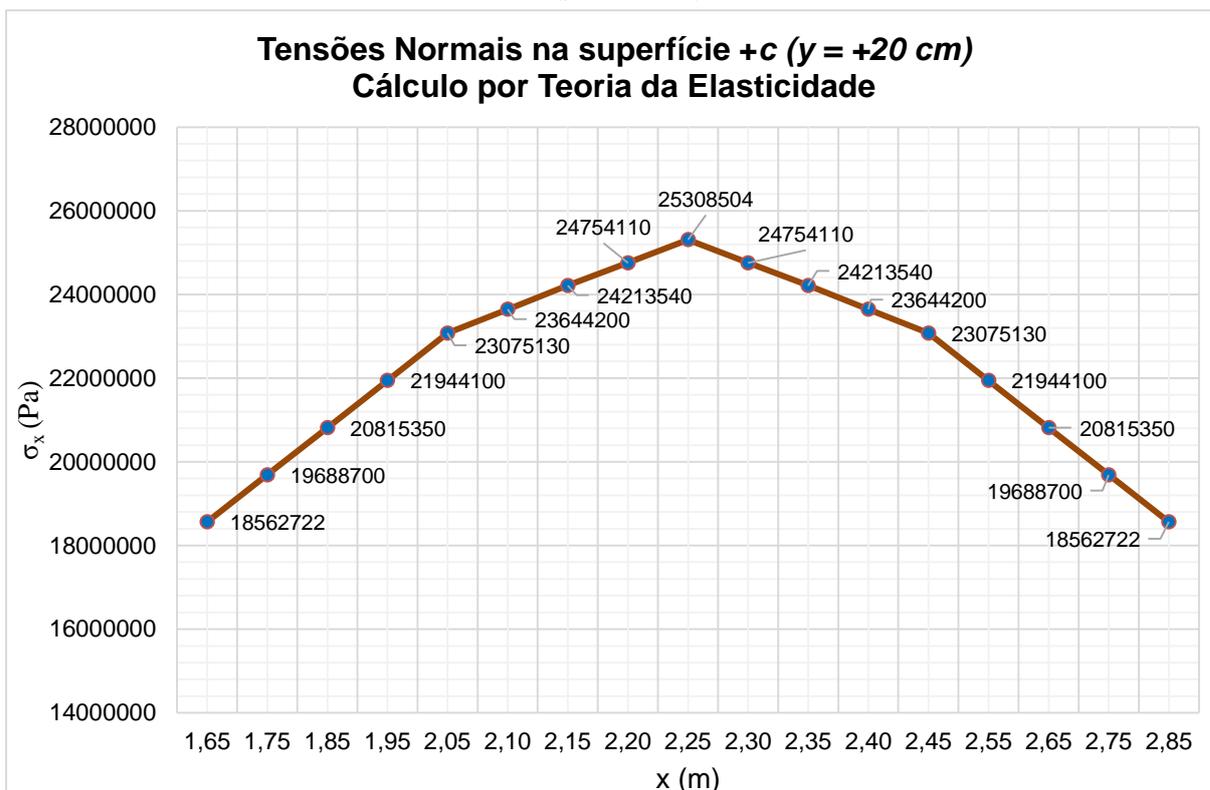
O gráfico 6.17 representa o diagrama de momento fletor da viga analisada. O eixo das ordenadas foi invertido simplesmente para caracterizar o momento fletor positivo conforme a notação difundida nas disciplinas específicas da Engenharia Civil, tais como a Estática das Estruturas, Estruturas de Concreto, etc., de modo que a concavidade da curva fique voltada para cima.

Gráfico 6.18 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície +c ( $y = +20$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

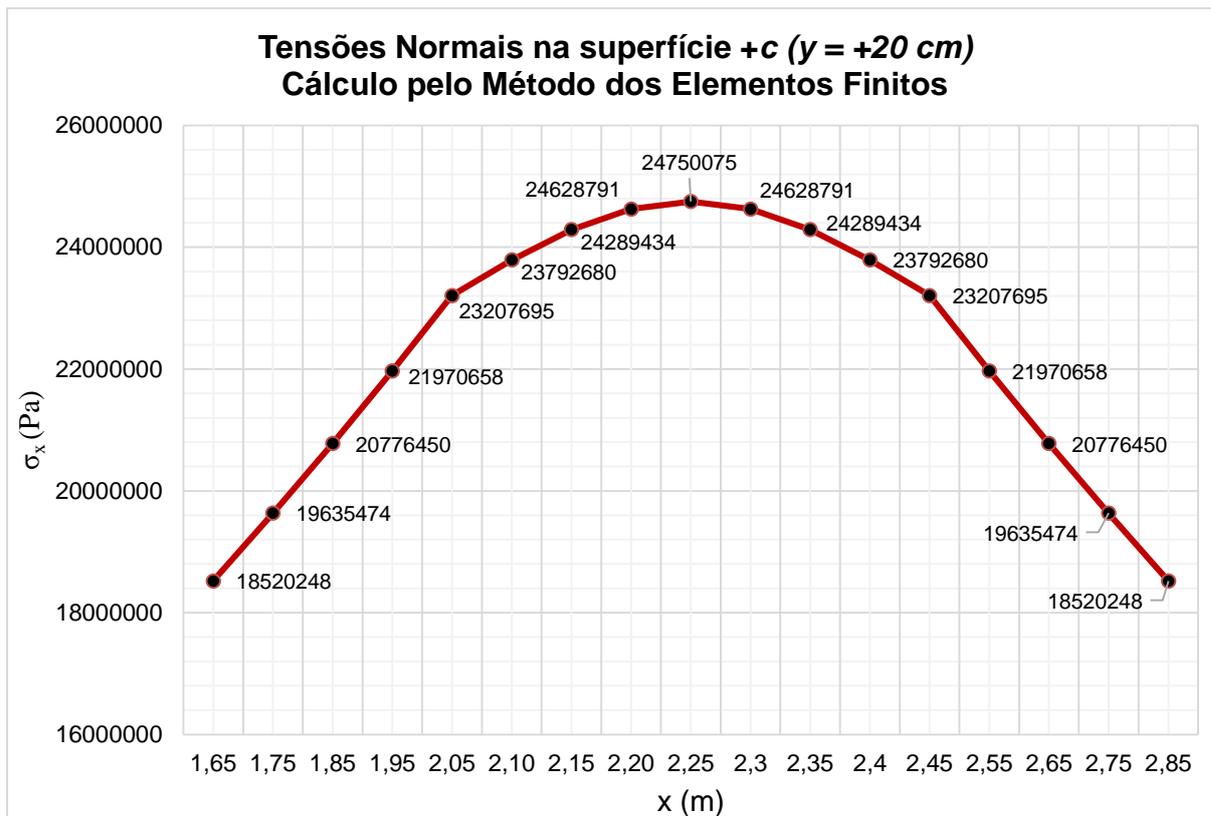
Gráfico 6.19 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície +c ( $y = +20$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se nos gráficos 6.18 e 6.19 uma distribuição de tensões normais de fato muito parecida em ambos os métodos de cálculo, com a característica comum de possuir uma concavidade culminando em um ponto máximo.

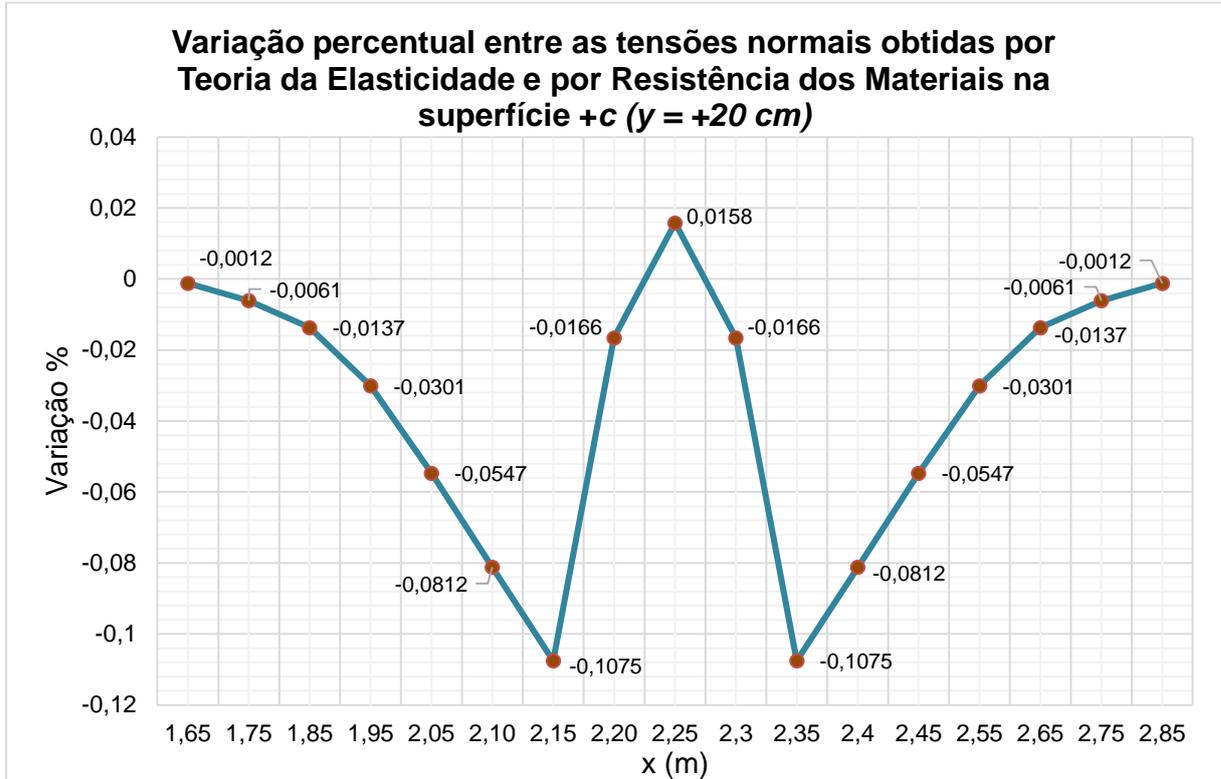
Gráfico 6.20 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +c (y = +20 cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

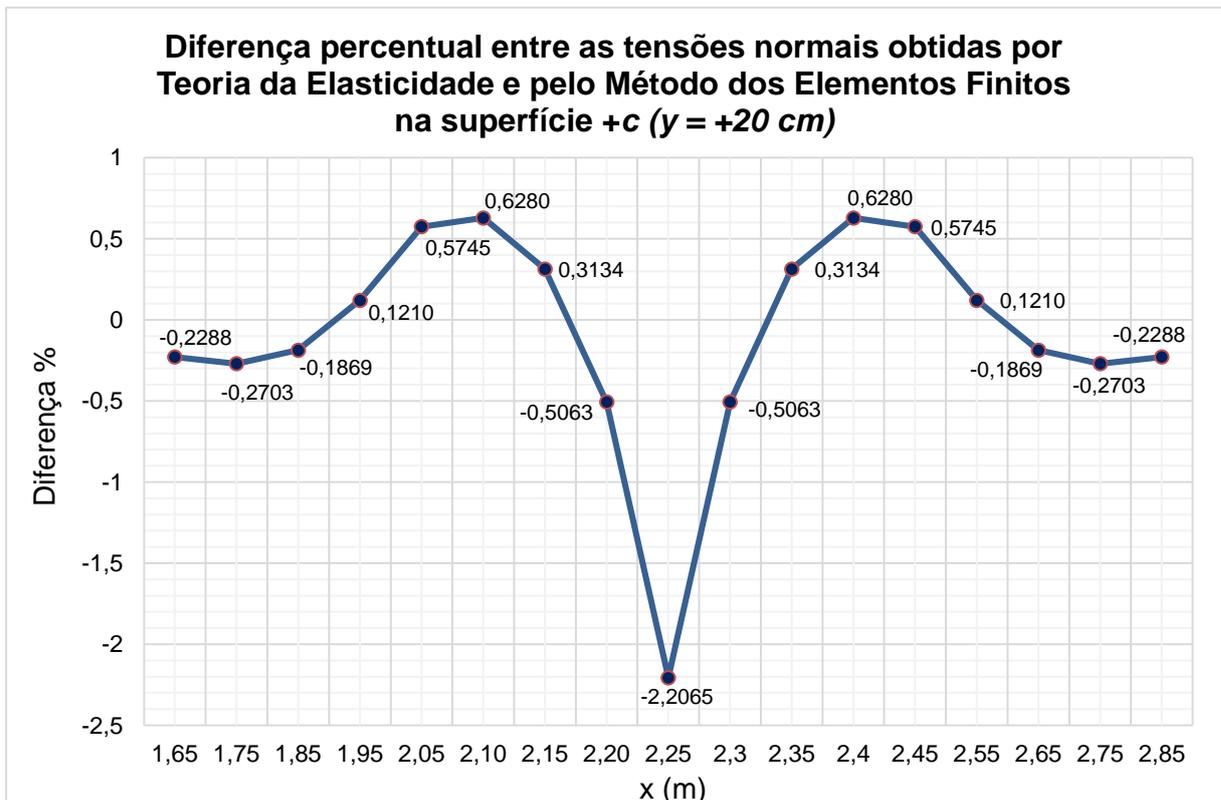
A curva de distribuição de tensões normais obtida pelo Método dos Elementos Finitos, conforme exposto no gráfico 6.20, difere, no aspecto de seu comportamento, de maneira relativamente sutil das encontradas pelos demais métodos.

Gráfico 6.21 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície +c (y = +20cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.22 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +c (y = +20 cm).

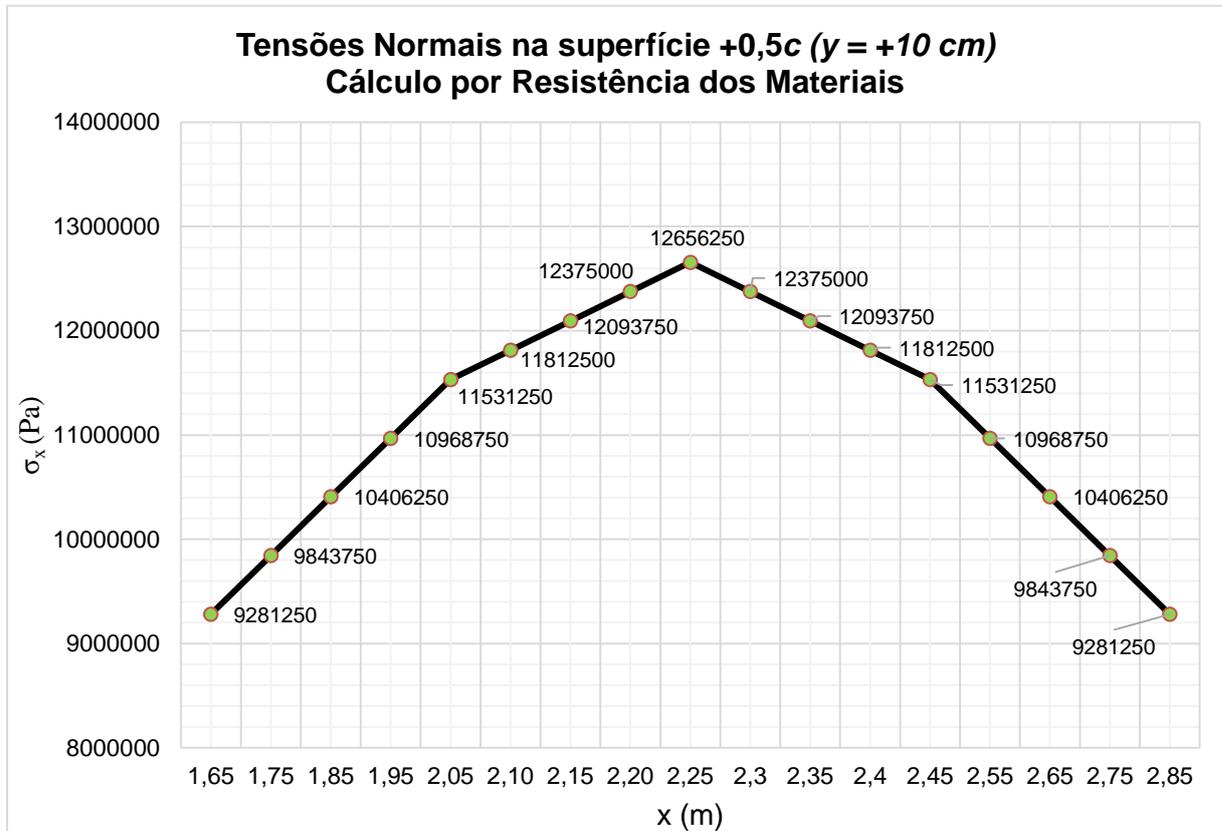


Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando as tensões normais, primeiramente nota-se que as variações percentuais por ambos os métodos são menores do que nas tensões de cisalhamento.

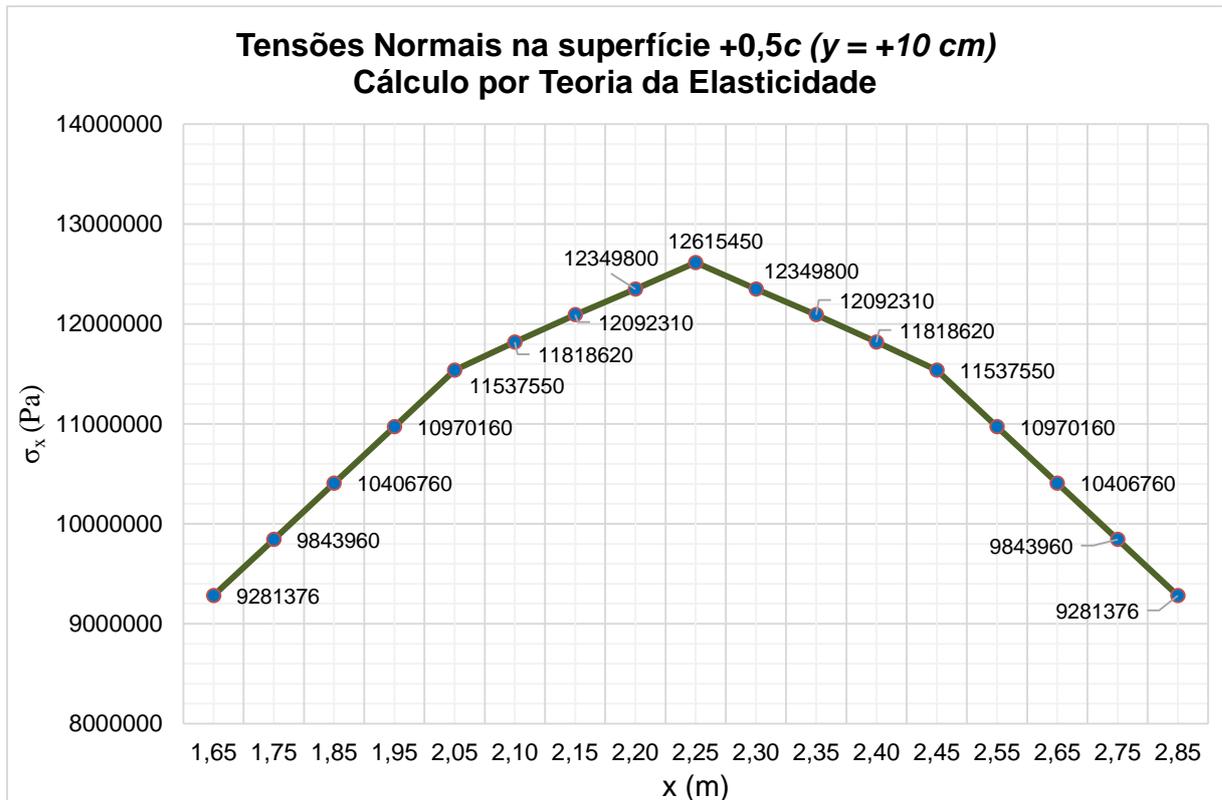
Na superfície +c, oposta à superfície onde se localiza o ponto de aplicação da carga concentrada, as tensões obtidas por Resistência dos Materiais são até 0,0158% maiores que as tensões obtidas por Teoria da Elasticidade, com base em TIMOSHENKO (1980), na seção transversal média, ou seja, em  $x = 2,25$  m. Já nas seções transversais 10 cm à esquerda e à direita do ponto médio, as tensões obtidas por Resistência dos Materiais são até 0,1075% menores que as tensões obtidas por Teoria da Elasticidade. Com relação às variações de tensões normais entre Teoria da Elasticidade e Método dos Elementos Finitos, verifica-se também que as discrepâncias são consideravelmente menores que nas tensões de cisalhamento, chegando a -2,21% na seção transversal média e a 0,628% nas seções 15 cm à esquerda e à direita da seção média.

Gráfico 6.23 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície +0,5c ( $y = +10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

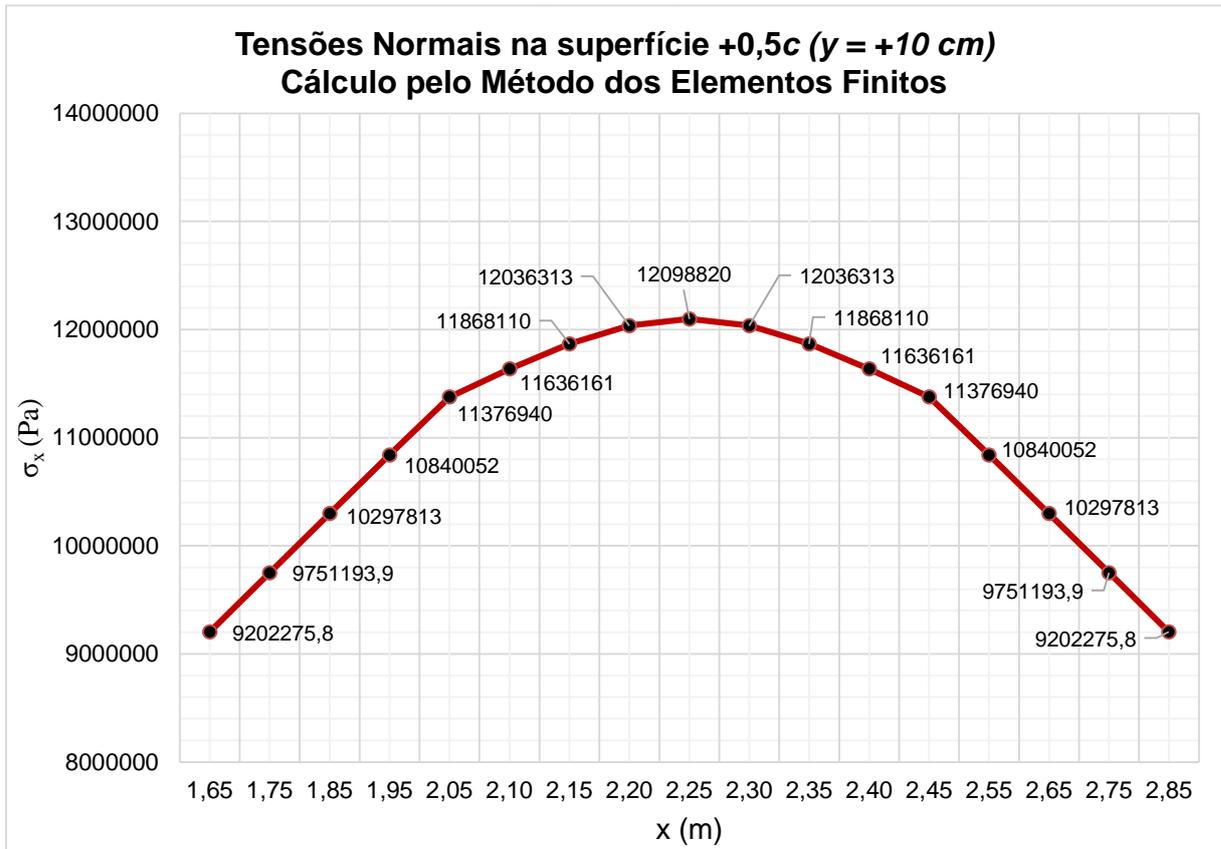
Gráfico 6.24 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície +0,5c ( $y = +10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se verificar nos gráficos 6.23 e 6.24 uma distribuição de tensões normais que caracterizam uma curva com concavidade voltada para baixo e simétrica com relação ao ponto máximo. Os dois métodos apresentam valores muito próximos entre si e gráficos praticamente iguais.

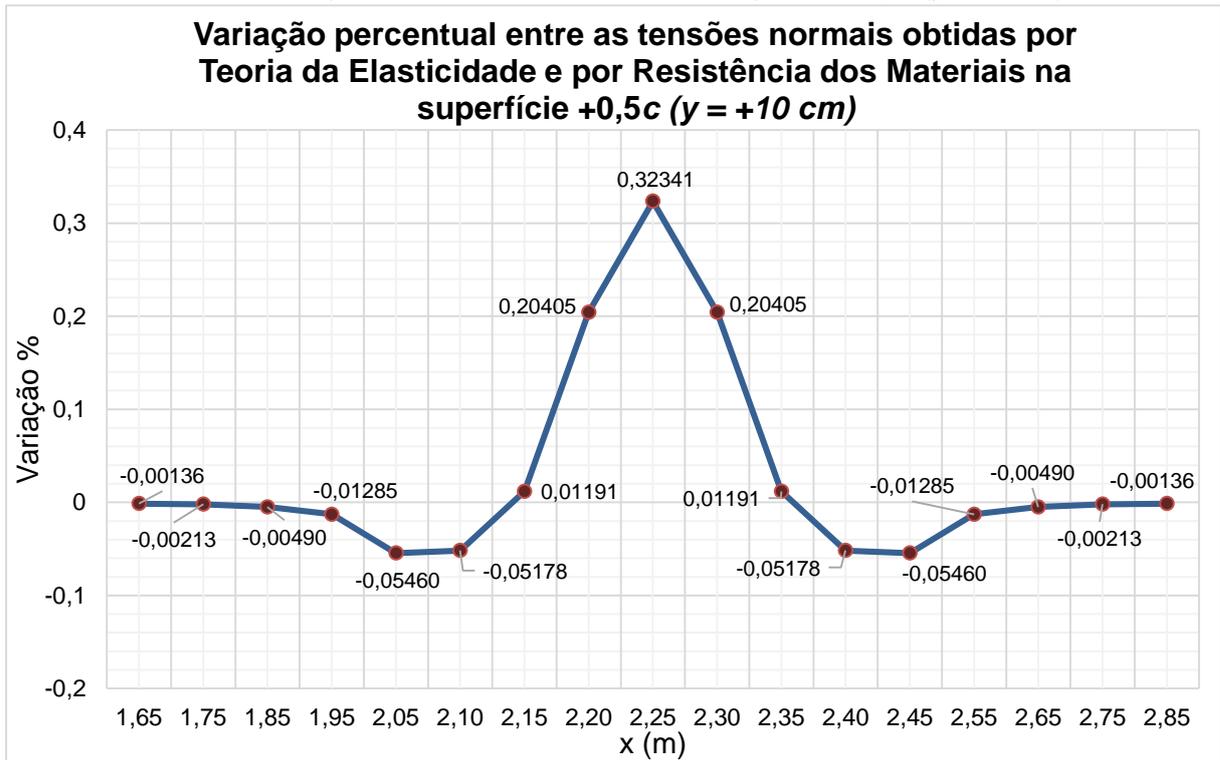
Gráfico 6.25 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +0,5c (y = +10 cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

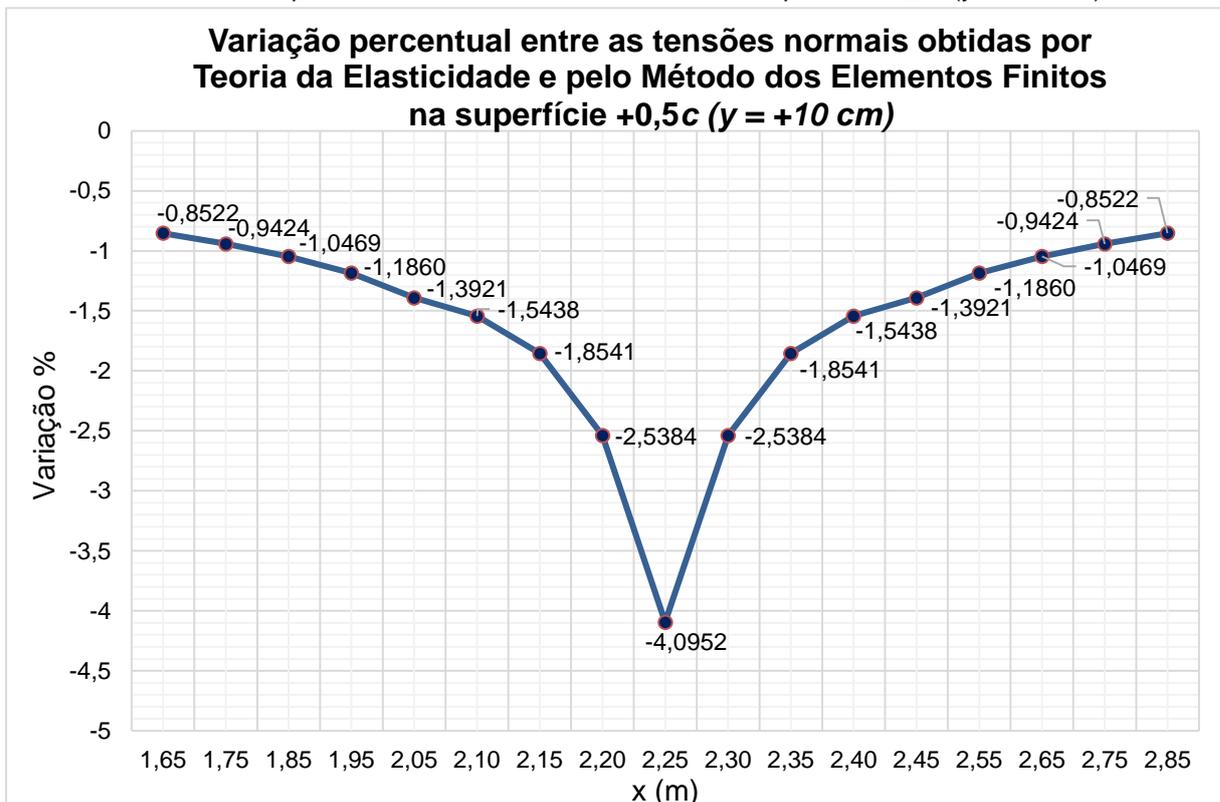
A curva de distribuição de tensões normais obtida pelo Método dos Elementos Finitos, como exposta no gráfico 6.25, destoa sutilmente, no aspecto de seu comportamento, das encontradas pelos demais métodos. Observa-se que a concavidade obtida tem formato mais arredondado, sendo que o valor da tensão no ponto máximo não é tão maior que nos pontos imediatamente consecutivos, sendo que nos gráficos 6.23 e 6.24, essa diferença é maior.

Gráfico 6.26 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície +0,5c (y = +10cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.27 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície +0,5c (y = +10 cm).

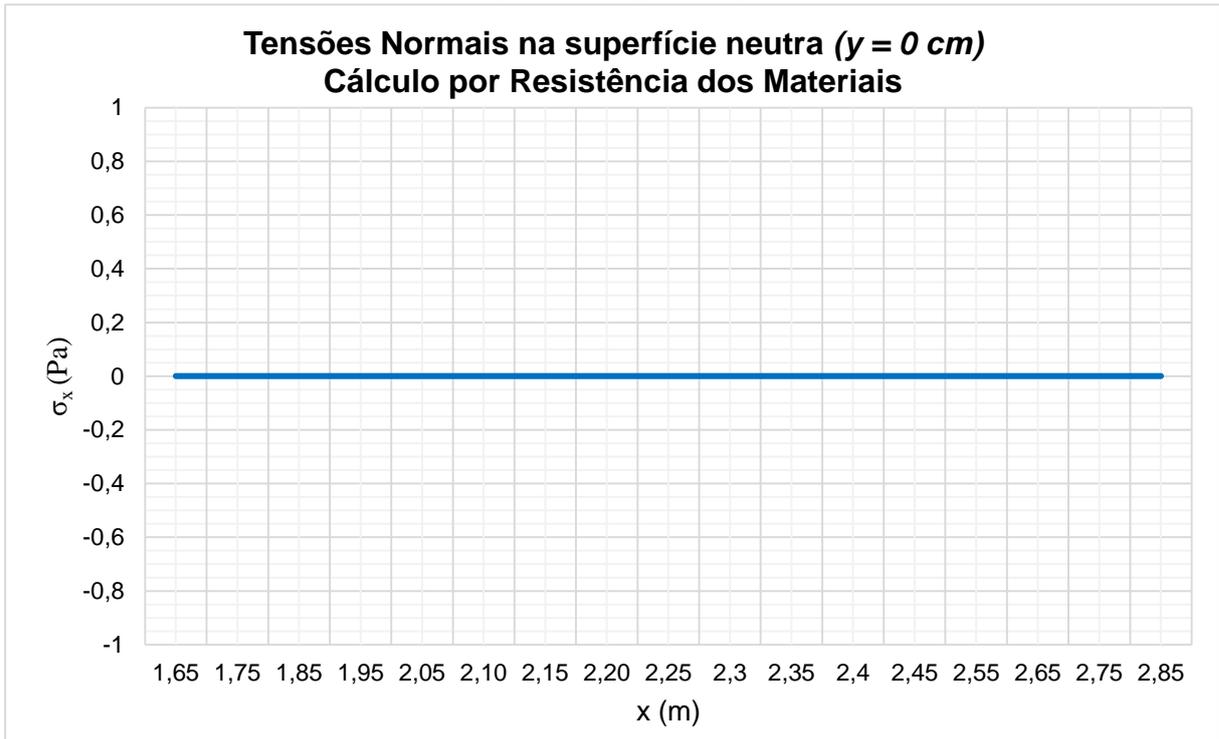


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na superfície +0,5c, as tensões obtidas por Resistência dos Materiais são até 0,3241% maiores que as tensões obtidas por Teoria da Elasticidade, com base em TIMOSHENKO (1980), na seção transversal média, ou seja, em  $x = 2,25$  m.

O Método dos Elementos Finitos apresenta, para esta superfície, tensões normais até 4,1% menores que as encontradas pela Teoria da Elasticidade.

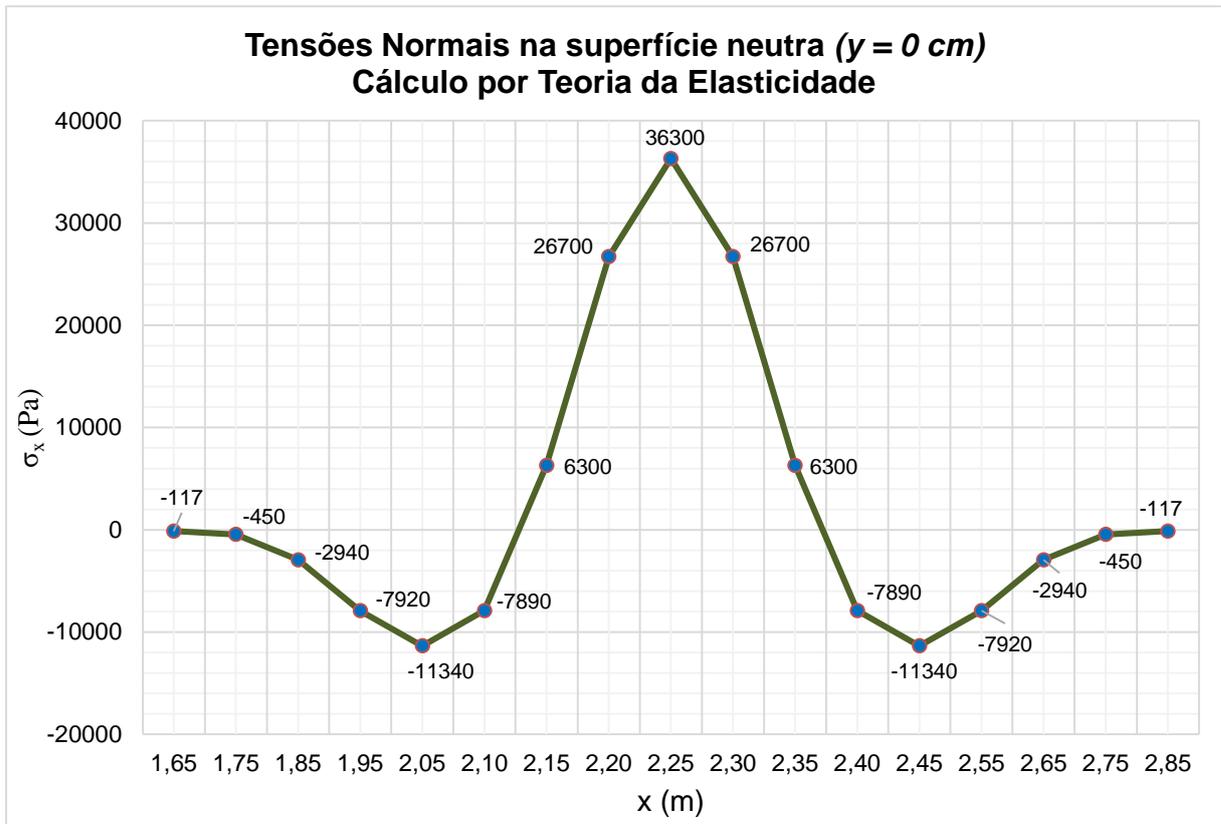
Gráfico 6.28 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície 0c ( $y = 0$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico 6.28 retrata que as tensões normais na superfície situada em  $y = 0$  c, ou seja, na chamada superfície neutra na Resistência dos Materiais, são nulas. Tal fato é devido às características específicas do método, que para vigas de seção transversal retangular constituídas de material homogêneo e isotrópico apresentam distribuição de tensões normais com valores máximos nos bordos e nulos na seção média.

Gráfico 6.29 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície  $0c$  ( $y = 0$  cm).

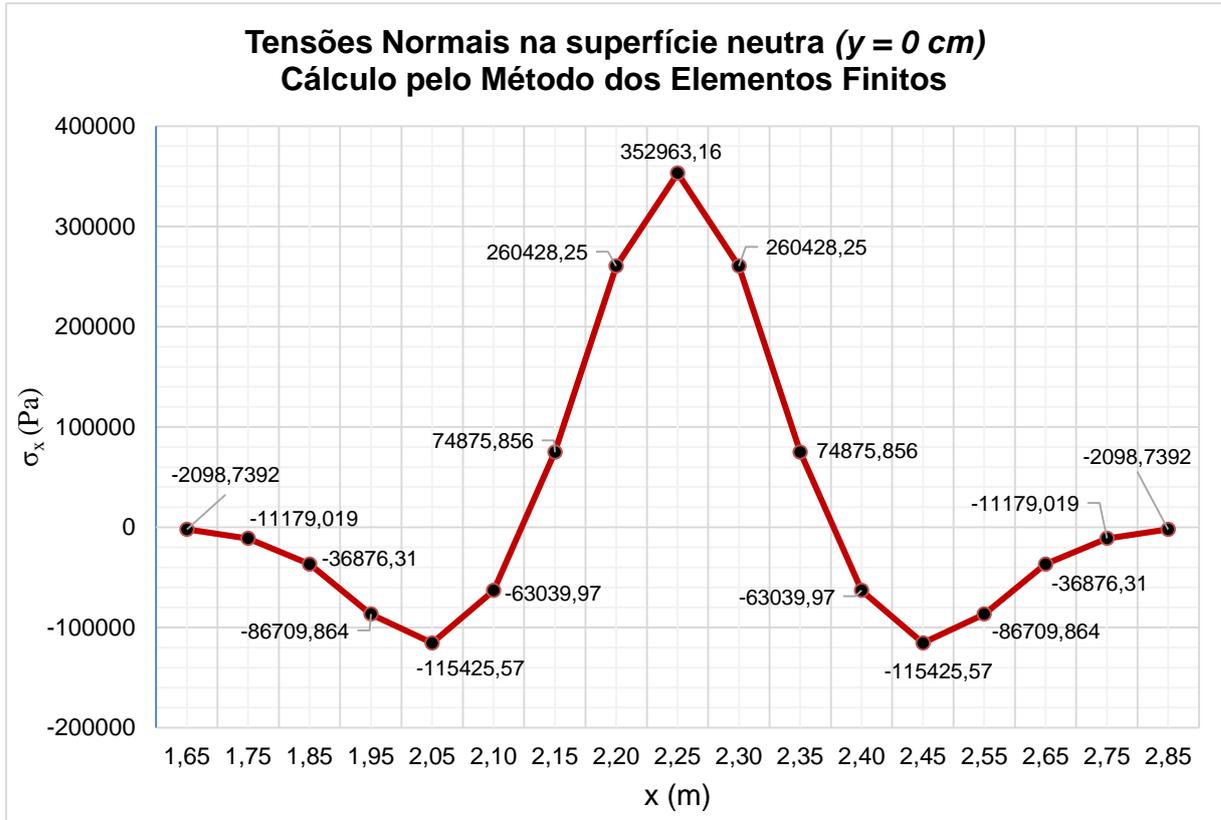


Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico 6.29 demonstra que a curva de distribuição de tensões normais obtida para essa seção assemelha-se com o exposto na figura 3.5c. Os valores obtidos para as tensões normais nessa superfície através da Teoria da Elasticidade são consideravelmente menores que os obtidos em outras superfícies analisadas mas, de fato, não são nulas, como determinam os resultados da Resistência dos Materiais.

É importante associar, novamente, tais conclusões, ao Princípio de Saint-Venant. Nota-se, mais uma vez, que as tensões tendem a se equilibrar e se distribuir de maneira uniforme a partir de uma certa distância do ponto de aplicação da carga concentrada. As tensões obtidas próximas a seção transversal média não são nulas, conforme as equações da Resistência dos Materiais, justamente pelos efeitos causados pela aplicação de carga concentrada, efeitos esses que são considerados na análise fotoelástica e imputados nas equações da Teoria da Elasticidade conforme exposto no capítulo 3, com embasamento em TIMOSHENKO (1980).

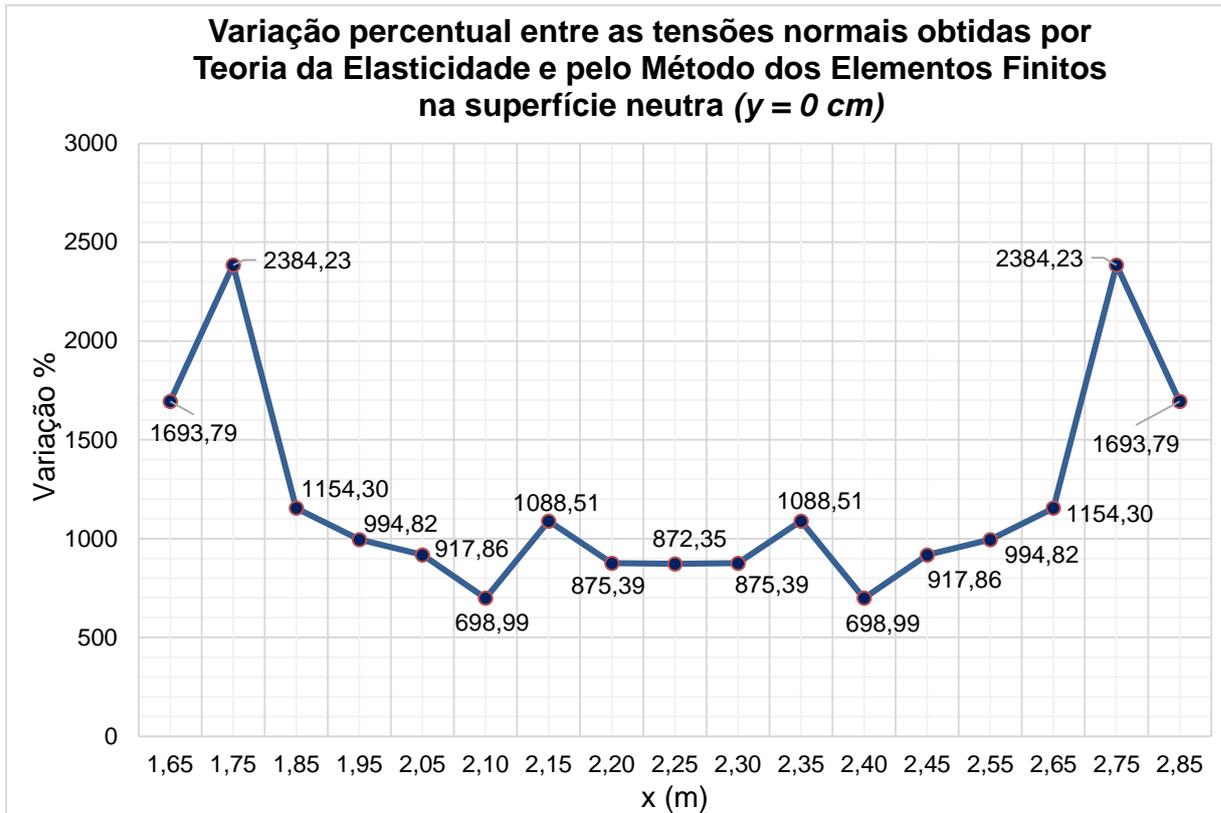
Gráfico 6.30 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície 0c ( $y = 0 \text{ cm}$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O comportamento da curva de distribuição de tensões pelo Método dos Elementos Finitos (gráfico 6.30) se assemelha, graficamente, à curva do gráfico 6.29, contudo, com valores absolutos distintos.

Gráfico 6.31 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos 0c ( $y = 0\text{cm}$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

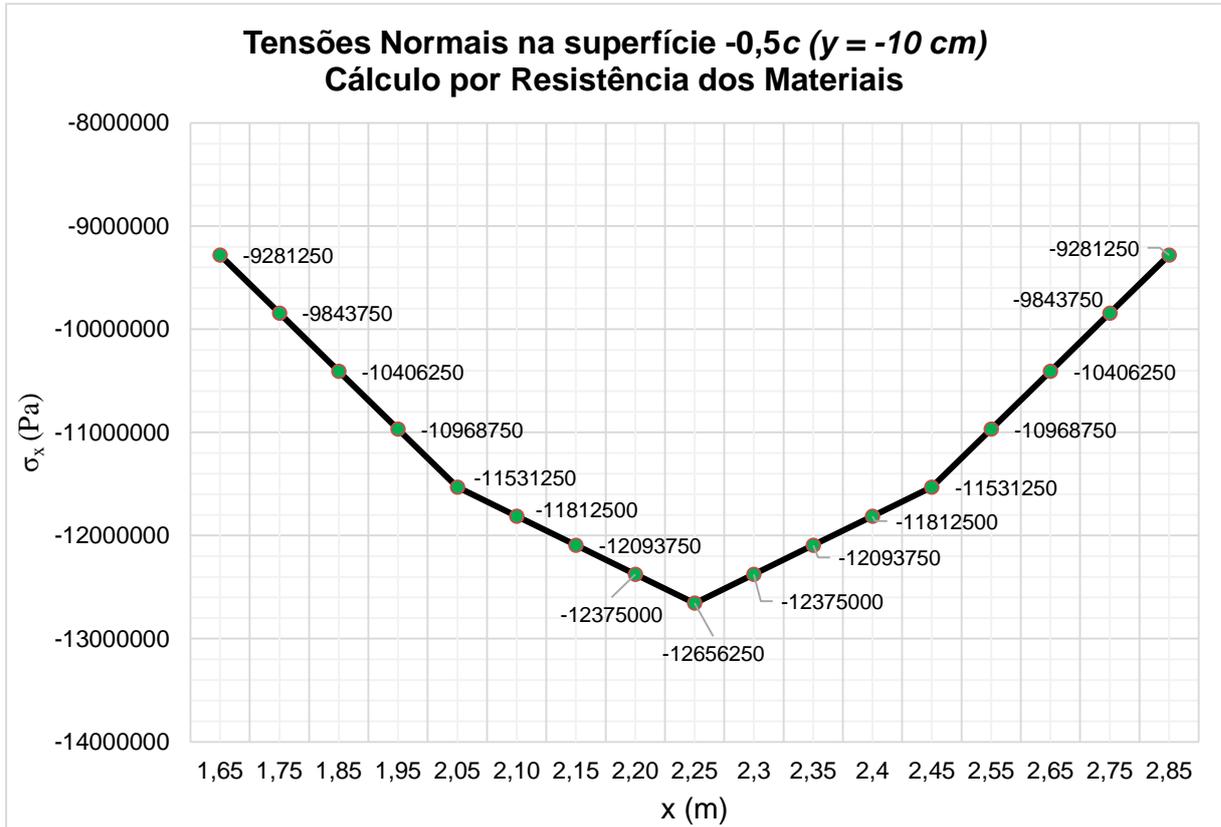
De antemão, convém ponderar que pela teoria elementar de vigas da Resistência dos Materiais, a superfície 0c é chamada de superfície neutra (linha neutra, associada ao plano da viga), visto que essa superfície passa pelo centroide da seção transversal e possui tensões normais nulas. No entanto, pelo exposto por TIMOSHENKO (1980), mostrado na Fig. 3.4 deste trabalho, as tensões normais nesta superfície não são necessariamente nulas.

Verifica-se que as tensões normais obtidas pela Teoria da Elasticidade correspondem exclusivamente à parcela  $\sigma'_x = \beta P/c$ , levando à resultados relativamente pequenos. Não foi construído o gráfico de variações entre Teoria da Elasticidade e Resistência dos Materiais face aos valores nulos obtidos para tensões normais por este último método.

Já com relação aos resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, as variações são demasiadamente grandes, chegando a 2384,23%, ou seja, um valor quase 25 vezes maior que o encontrado por Teoria da Elasticidade. Todavia, os valores absolutos das tensões normais encontrados para a superfície neutra pelo

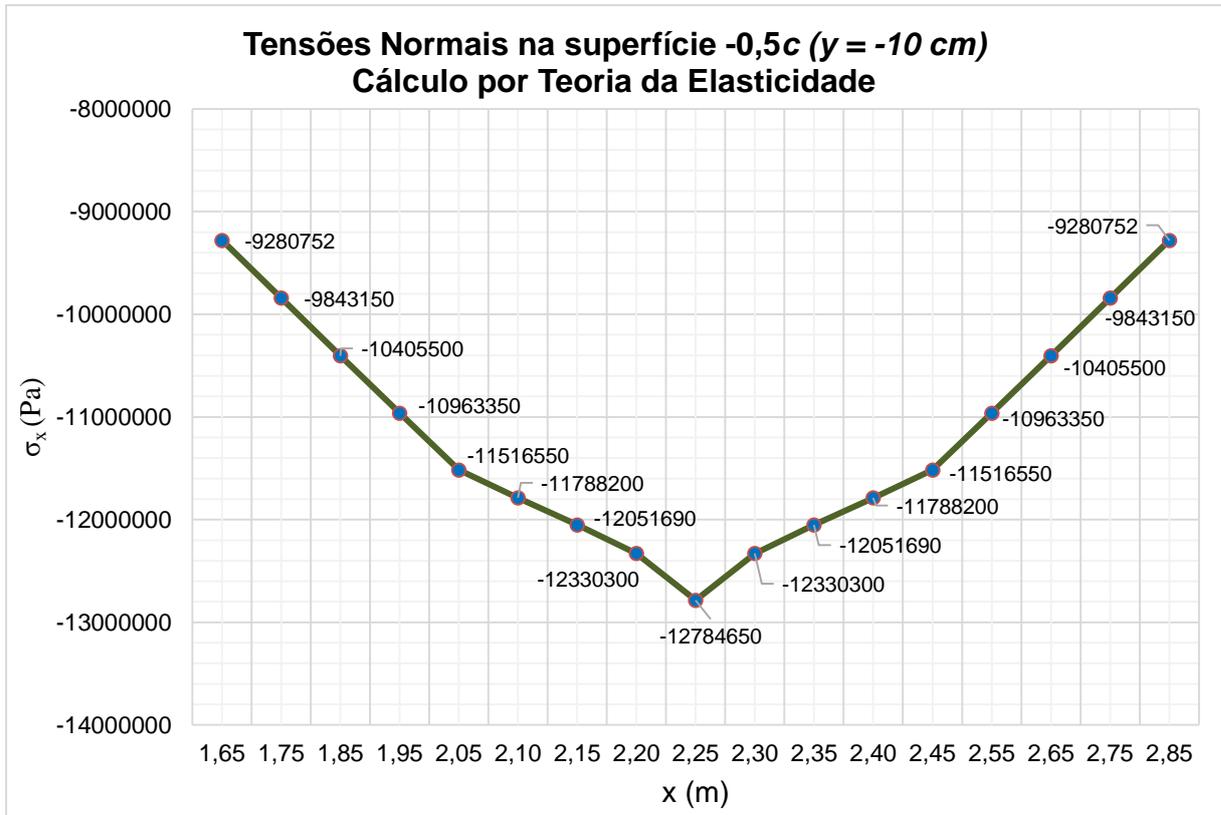
Método dos Elementos Finitos, apesar de muito maiores que o encontrado pela Teoria da Elasticidade, são consideravelmente menores que os obtidos em superfícies acima e abaixo da superfície em questão.

Gráfico 6.32 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície  $-0,5c$  ( $y = -10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

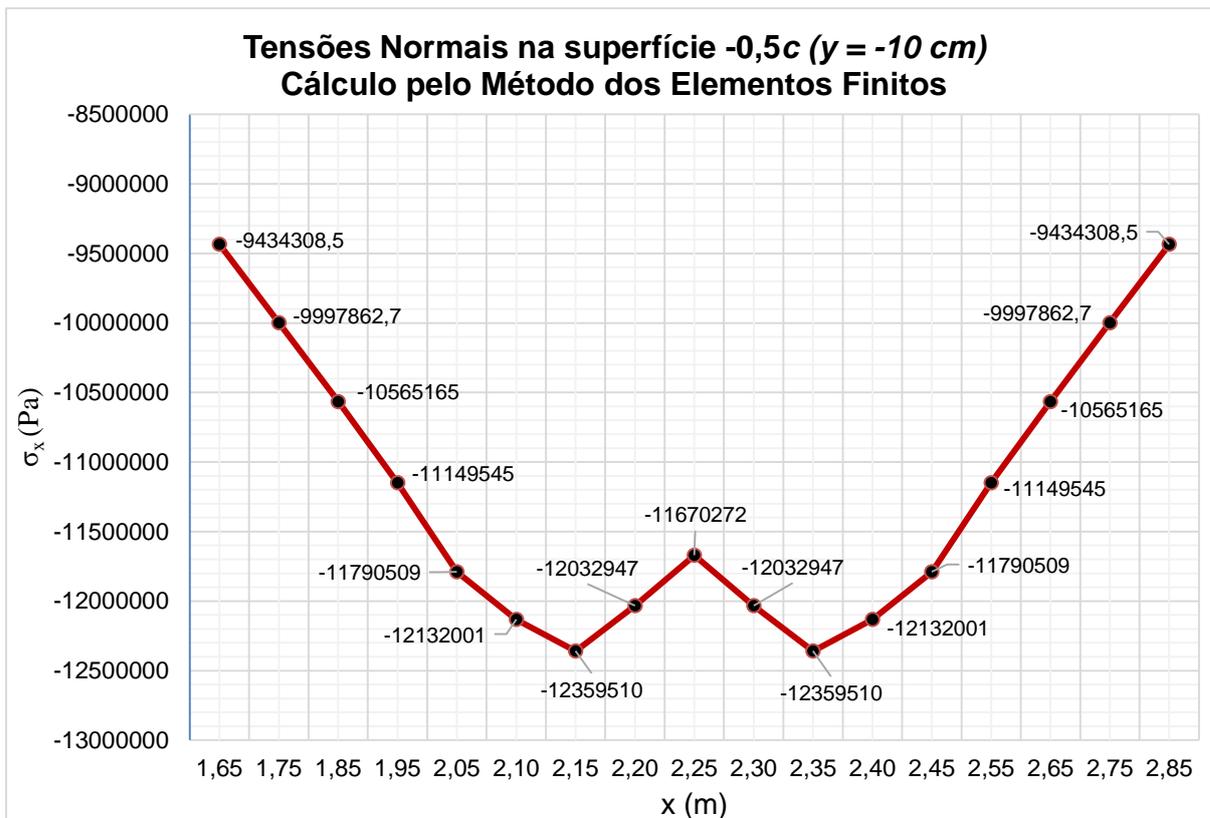
Gráfico 6.33 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície  $-0,5c$  ( $y = -10$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se observar novamente a semelhança entre as curvas obtidas pela Resistência dos Materiais e pela Teoria da Elasticidade, conforme os gráficos 6.32 e 6.33. Todavia, nessa superfície, o valor máximo obtido pelo segundo método supracitado difere dos demais valores de maneira mais acintosa do que no primeiro método.

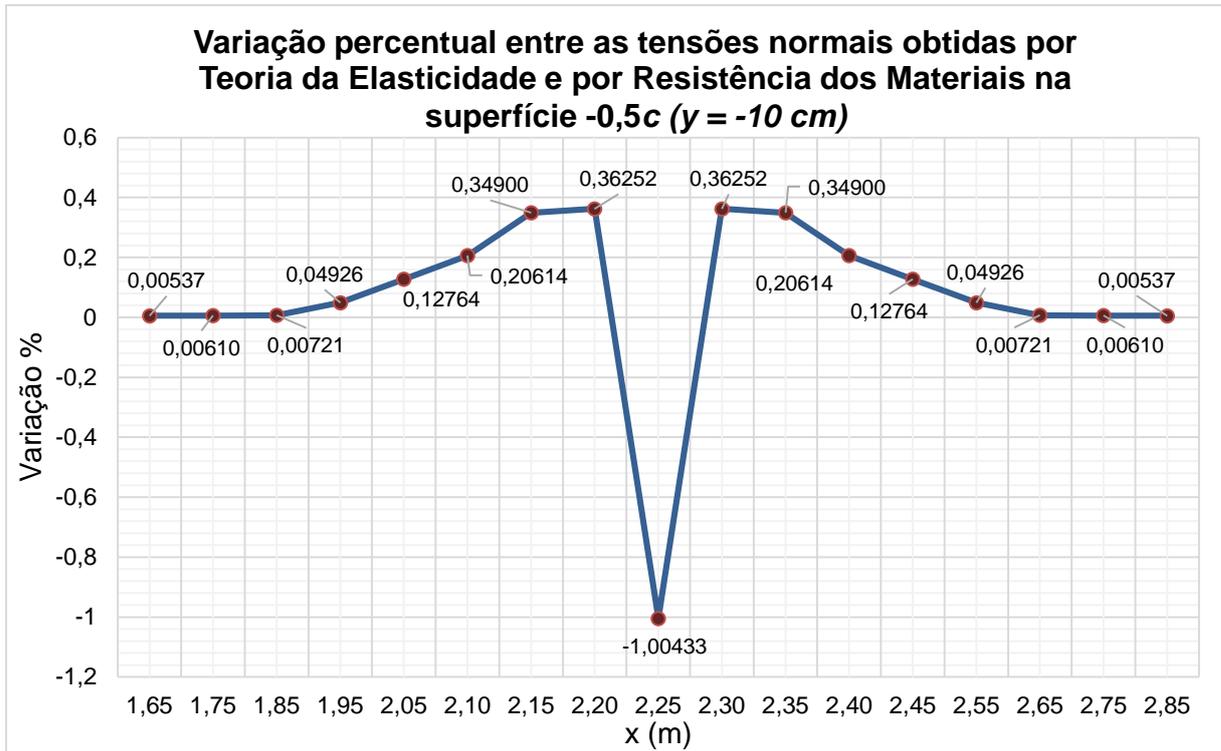
Gráfico 6.34 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície  $-0,5c$  ( $y = -10\text{ cm}$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

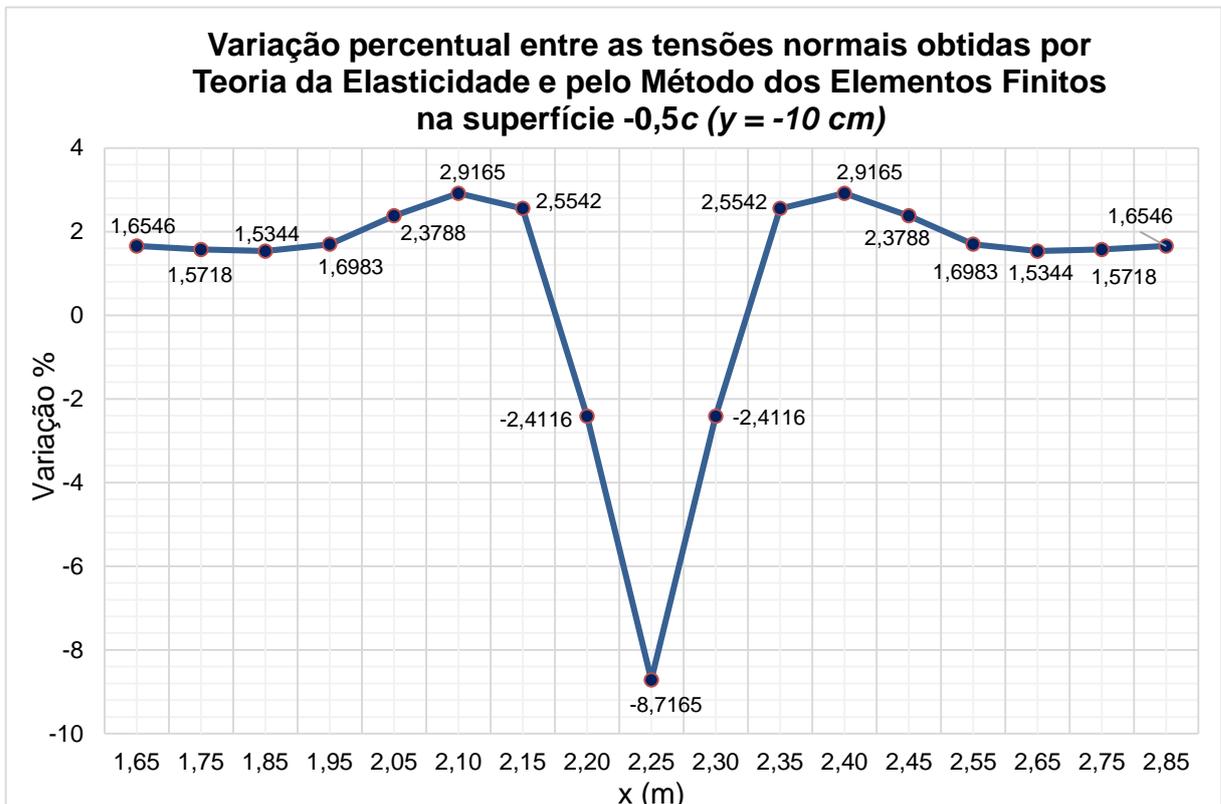
Os resultados encontrados através da aplicação do Método dos Elementos Finitos para a superfície da viga situada em  $y = -0,5c$ , promovem a obtenção de uma curva significativamente diferente das obtidas pelos outros métodos.

Gráfico 6.35 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície -0,5c (y = -10cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.36 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -0,5c (y = -10 cm).

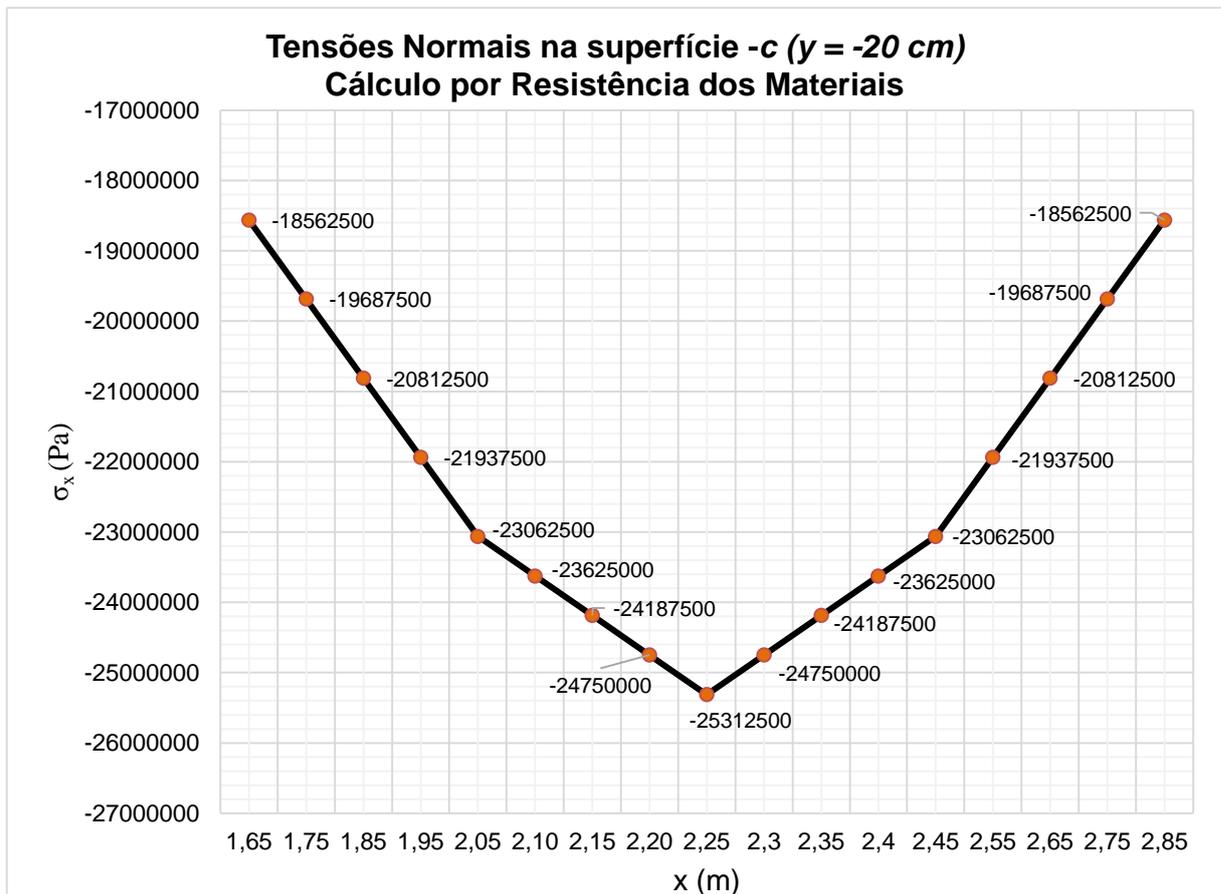


Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a superfície  $-0,5c$  observa-se que, para a seção transversal média, a tensão normal obtida pela Resistência dos Materiais é 1% menor que a obtida pela Teoria da Elasticidade, enquanto que a tensão normal obtida pelo Método dos Elementos Finitos para o mesmo ponto é 8,72% menor.

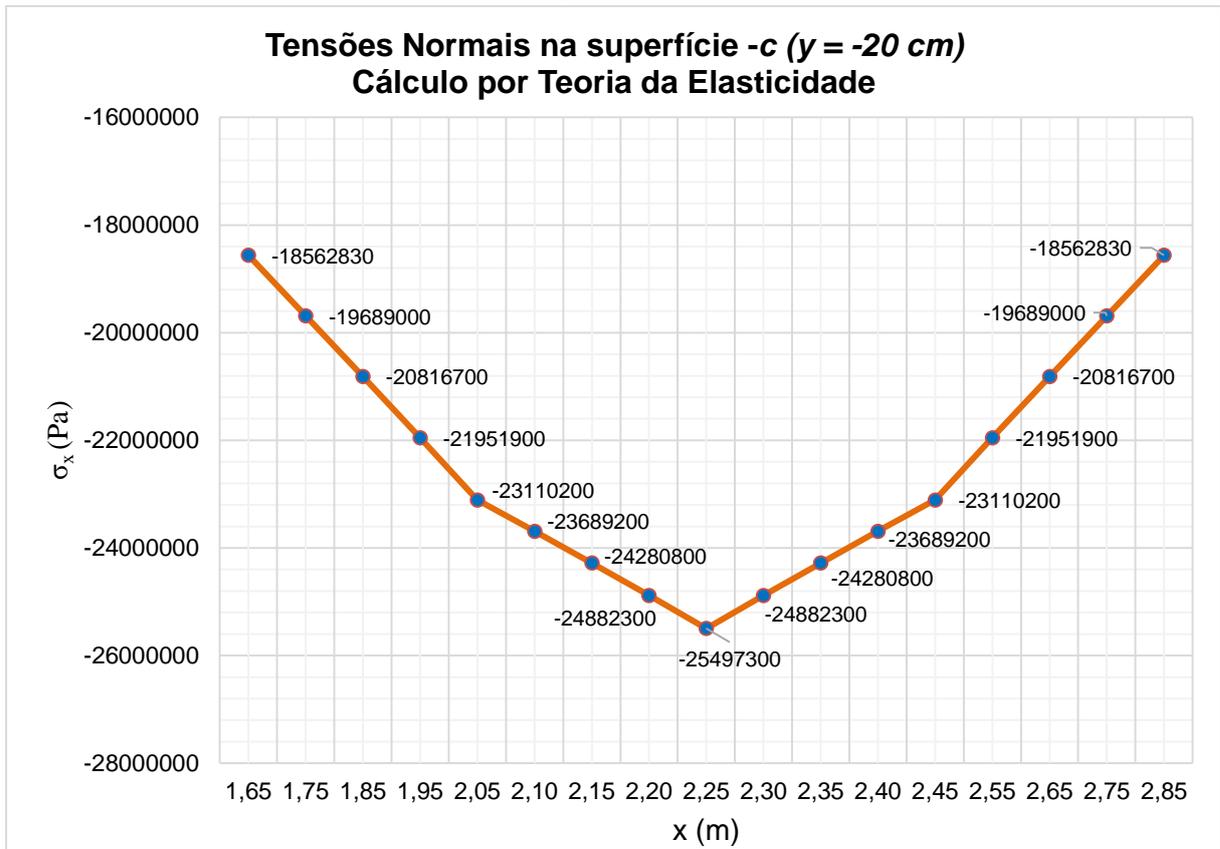
Contudo, observando os resultados das tensões normais para a superfície da viga situada em  $y = -0,5c$ , fica evidente que, mesmo com as variações percentuais destoando entre os métodos nas demais superfícies, pode-se concluir que as variações obtidas para a superfície neutra são atípicas, carecendo de análises mais refinadas, principalmente no que tange à aplicação do Método dos Elementos Finitos aplicando o tipo de elemento utilizado neste trabalho.

Gráfico 6.37 – Tensões normais calculadas pelas equações da Resistência dos Materiais na superfície  $-c$  ( $y = -20$  cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.38 – Tensões normais calculadas pela formulação da Teoria da Elasticidade na superfície -c ( $y = -20$  cm).

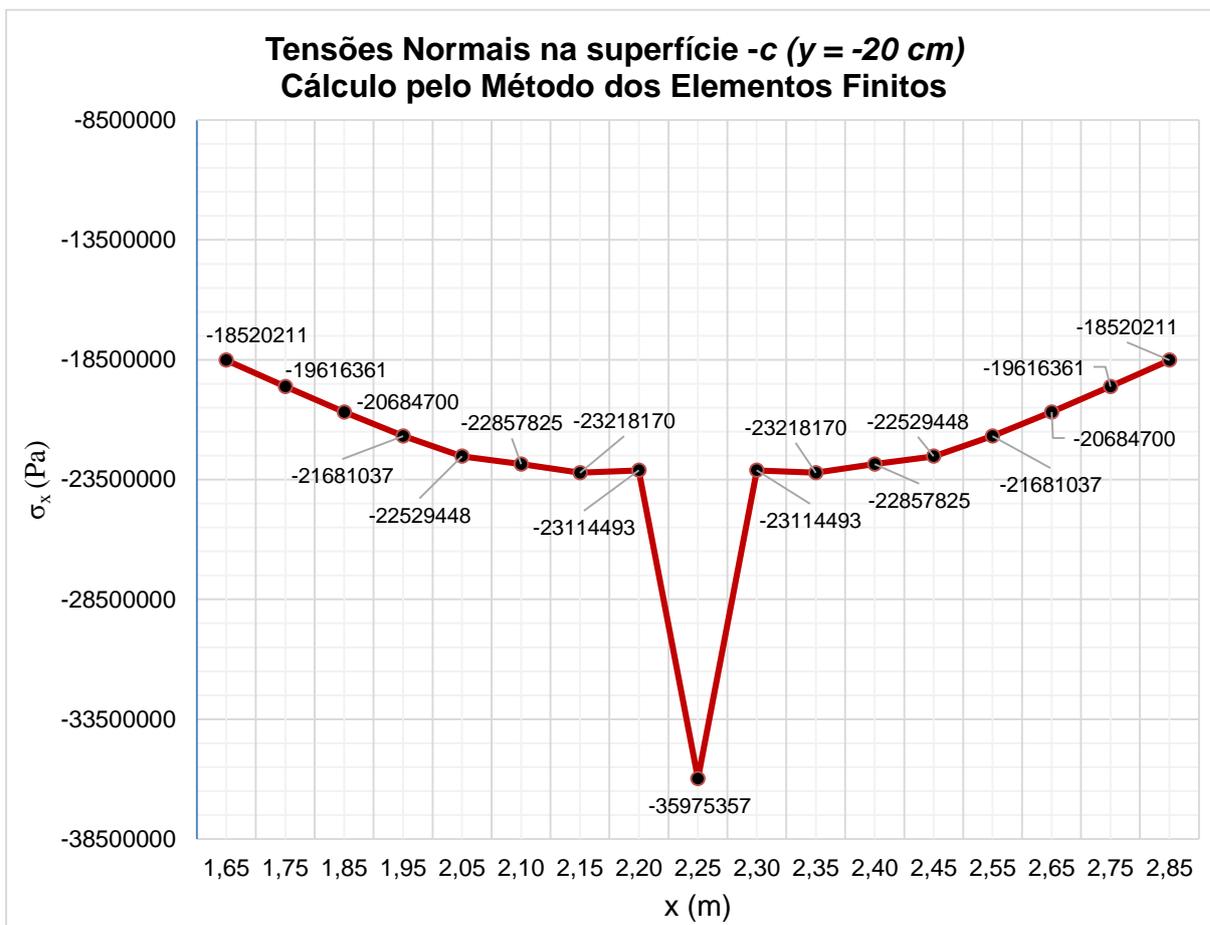


Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se nos gráficos 6.37 e 6.38 uma semelhança nas curvas de distribuição de tensões normais obtidas pela formulação da Resistência dos Materiais e pela Teoria da Elasticidade.

Pode-se observar que ambas as curvas possuem uma concavidade voltada para cima, com valores absolutos muito próximos e ponto máximo demarcando a simetria entre as partes direita e esquerda do gráfico.

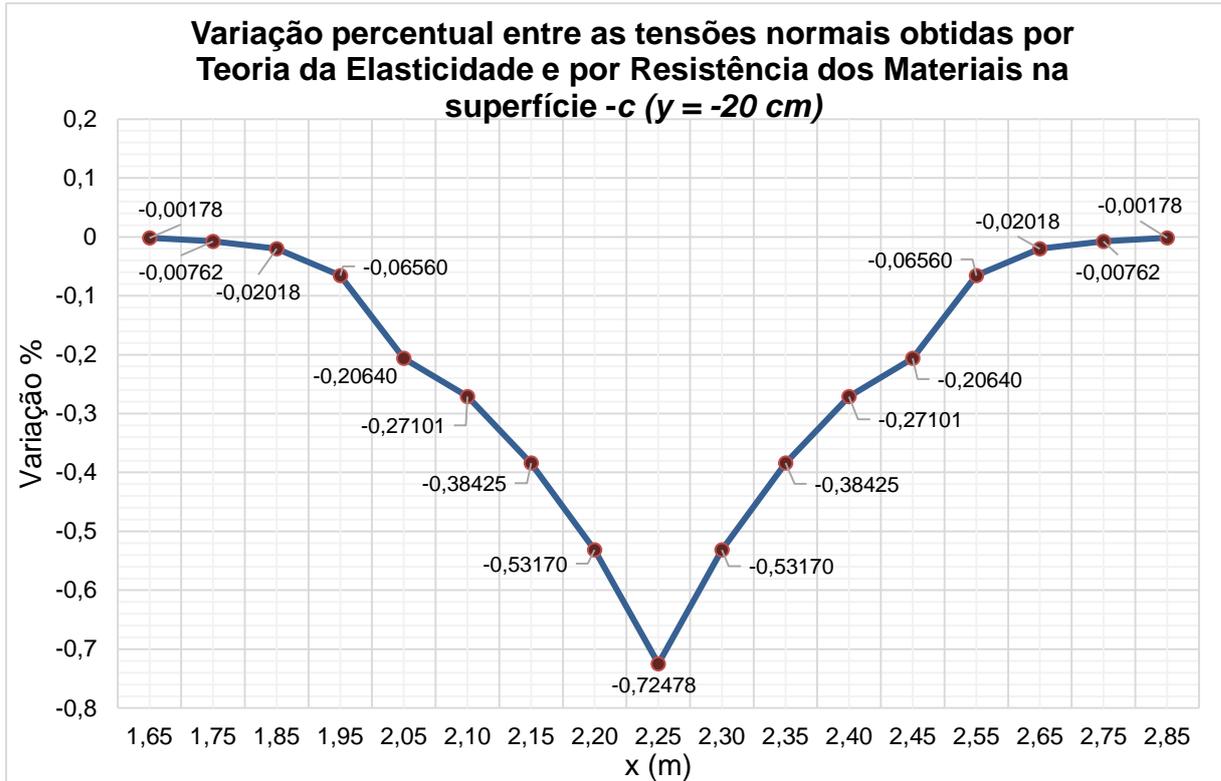
Gráfico 6.39 – Tensões normais calculadas pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -c (y = -20 cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

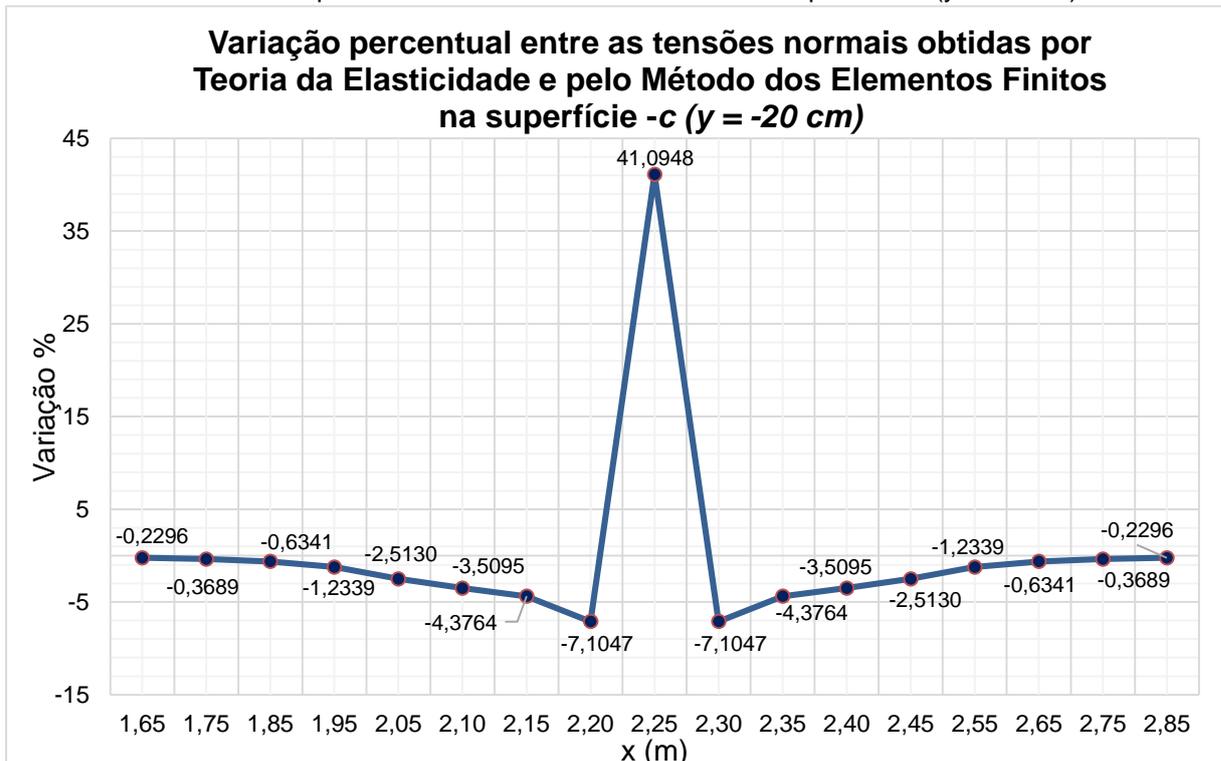
Através da interpretação do gráfico 6.39, percebe-se que este destoa consideravelmente dos gráficos 6.37 e 6.38, tanto em valores absolutos, com destaque para o ponto médio, quanto na sua característica de forma. O gráfico 6.39 apresenta uma grande variação de valor de tensão normal no ponto médio, com ponto máximo culminando em valor bem distante de seus pontos vizinhos.

Gráfico 6.40 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e por Resistência dos Materiais na superfície -c (y = -20cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6.41 – Variação percentual entre os resultados de tensões normais obtidos por Teoria da Elasticidade e pelo Método dos Elementos Finitos na superfície -c (y = -20 cm).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esta superfície coincide com aquela que contém o ponto de aplicação da carga concentrada. A tensão normal obtida na superfície -c pela Resistência dos Materiais na seção transversal média é 0,72% menor que a obtida pela Teoria da Elasticidade. Já o valor obtido pelo Método dos Elementos Finitos é 41,1% maior que a Teoria da Elasticidade, evidenciando uma grande diferença entre os métodos de cálculo.

Observa-se que, a maior variação, tanto no gráfico 6.40 como no gráfico 6.41, ocorre no ponto médio da superfície analisada. Os valores obtidos pelo Método dos Elementos Finitos chegam a ser 7,1% menores que os da Teoria da Elasticidade no ponto vizinho ao ponto médio, variando abruptamente para um resultado 41,09% maior.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por todo o estudo realizado, resultados obtidos e gráficos analisados, pode-se tirar algumas conclusões com relação aos métodos aplicados para cálculo de tensões normais e de cisalhamento.

Uma relevante conclusão é que, com base nos resultados obtidos nesse estudo, o elemento plano isoparamétrico quadrilateral quadrático da família *Serendipity*, com 8 pontos nodais, utilizados para o cálculo das tensões pelo Método dos Elementos Finitos, apresentou resultados que divergem dos valores obtidos pela Teoria da Elasticidade, sendo que em algumas superfícies, essa diferença é relativamente grande. A falta de uma boa convergência dos resultados pode ser devida à alguns fatores que, de certa forma, já eram previstos quando da abordagem inicial e do propósito deste estudo. Um fator à se considerar é que o tipo de elemento empregado é um elemento de chapa, com funções de interpolação quadráticas para o contorno do problema, o que justifica a definição de que este estudo consiste em um teste de performance com este tipo de elemento, conforme citado no início do capítulo 4. A escolha do tipo de elemento finito a ser empregado implica uma modelagem matemática que, dependendo da quantidade de elementos na discretização, poderia retornar resultados condizentes com a Teoria da Elasticidade, o que não ocorreu de fato. Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se utilizar elementos cujas funções de interpolação sejam de maior grau, prosseguindo as comparações afim de refinar os resultados.

À de se levar em conta também que os resultados determinados pela Teoria da Elasticidade são tomados aqui como referência, visto que são dados determinados por métodos fotoelásticos, com embasamento empírico-científico amplamente difundido por Timoshenko e aceito no meio acadêmico há décadas. Entretanto, há de se ponderar que o Método dos Elementos Finitos é um método numérico moderno, com emprego de mecanismos computacionais e formulações matemáticas avançadas. Desse modo, propõe-se como sugestão para trabalhos futuros a utilização de outros tipos de elementos e o emprego de *softwares* comerciais para realizar análises similares com a deste trabalho e verificar as variações nos resultados.

Com relação aos resultados das tensões obtidos pela teoria clássica da Resistência dos Materiais, é notório que os resultados para tensões normais  $\sigma_x$  não divergem de maneira significativa dos resultados da Teoria da Elasticidade, com variações de 1% ou menos. Entretanto há de se ponderar que as tensões de cisalhamento  $\tau_{xy}$  apresentam variações que devem ser consideradas, chegando a 13%, fato que pode e deve ser levado em conta em situações específicas de análise estrutural, citando como exemplo, as vigas de transição em edificações, que recebem cargas concentradas de pilares que se apoiam nas mesmas.

Ainda como sugestão para trabalhos futuros, pode-se efetuar outras comparações entre os resultados obtidos pela Teoria da Elasticidade e pela Resistência dos Materiais, principalmente para as tensões de cisalhamento, buscando chegar a coeficientes de correção em função das características da viga e do carregamento a que está submetida, permitindo uma modelagem simplificada, porém com resultados mais confiáveis, favorecendo análises mais seguras.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, F. P. **Resistência dos Materiais**. Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Jonhston Jr.; tradução e revisão técnica Celso Pinto Morais Pereira. – 3ª ed. – São Paulo : MAKRON Books, 1995.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. Russel Charles Hibbeler; tradução Arlete Simille Marques; revisão técnica Sebastião Simões da Cunha Jr. – 7ª ed. – São Paulo : PEARSON Prentice Hall, 2010.

PINTO JÚNIOR, D. S. **Introdução ao Métodos Discretos de Análise Numérica de EDO e EDP** – São Carlos, SP : SBMAC, 2006 – (Notas em Matemática Aplicada; v. 23)

OLIVEIRA, W. C. **Método dos Elementos Finitos Aplicado na Solução de Problemas de Elasticidade**. Wlamir Carlos de Oliveira; Notas de aula para o curso de pós-graduação – 9ª versão – Itajubá, MG : Instituto de Engenharia Mecânica (IEM), Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), 2013.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. 3ª Ed. Rio de Janeiro, Brasil: Guanabara Dois, 1980.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Method**. Olgierd Cecil Zienkiewicz; – 3ª ed. – New York : MCGRAW-HILL, 1977.

